Bipartizando Grafos Livres de P_6 pela Remoção de um Emparelhamento*

Carlos V.G.C. Lima[1], **Cícero S. Morais**[1†]

[1]Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Brasil

vinicius.lima@ufca.edu.br, samuel.santos@aluno.ufca.edu.br

Abstract. *Given a graph $G = (V, E)$, a bipartizing matching $M \subseteq E(G)$ of G is a matching whose removal eliminates all the odd cycles of G (or equivalently, whether $G - M$ is bipartite). We study the problem of determining whether G admits a bipartizing matching. This problem is equivalent to determine whether G admits a $(2, 1)$-coloring, which is a 2-coloring of $V(G)$ such that each color class induces a graph of maximum degree at most 1. In this paper, we extend the result of Lima et al. (2021) about P_5-free graphs by showing a polynomial-time algorithm that decides whether a P_6-free graph admits a bipartizing matching.*

Resumo. *Dado um grafo $G = (V, E)$, um emparelhamento bipartizante $M \subseteq E(G)$ de G é um emparelhamento cuja remoção elimina todos os ciclos ímpares de G (ou equivalentemente, se $G - M$ é bipartido). Estudamos o problema de determinar se G admite um emparelhamento bipartizante. Este problema é equivalente ao de determinar se G admite uma $(2, 1)$-coloração, que é uma 2-coloração de $V(G)$ tal que cada classe de cor induz um grafo de grau máximo igual a 1. Neste trabalho, estendemos o resultado de Lima et al. (2021) sobre grafos livres de P_5, apresentando um algoritmo polinomial que decide se um grafo livre de P_6 admite um emparelhamento bipartizante.*

1. Introdução

Neste trabalho, todos os grafos são considerados finitos e simples. Utilizamos as noções e notações de Teoria dos Grafos e complexidade que podem ser encontradas em [Bondy and Murty 2008]. Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma propriedade Π sobre grafos, o *problema de deleção de arestas* consiste em determinar o número mínimo de arestas requerido a serem removidas para se obter um grafo satisfazendo Π [Burzyn et al. 2006]. Dado um inteiro $k \geq 0$, o *problema de decisão de deleção de arestas* questiona se existe um conjunto $F \subseteq E(G)$ com $|F| \leq k$, tal que o grafo obtido pela remoção de F satisfaz Π. Ambas as versões tem recebido grande atenção no estudo de suas complexidades, onde podemos citar [Yannakakis 1981, Burzyn et al. 2006, Natanzon et al. 2001, Alon and Stav 2009, Guillemot et al. 2012] e as referências internas para aplicações.

Em [Furmańczyk et al. 2015], os autores consideraram a *bipartização* (obtenção de um grafo bipartido) em grafos cúbicos através da remoção de um conjunto independente. Neste trabalho consideramos a versão análoga com respeito a remoção de arestas, onde tais arestas possuem uma propriedade específica: elas formam um *emparelhamento*,

*Este trabalho tem o apoio do projeto CNPq Universal [422912/2021-2].

†Bolsista PIBIC/CNPq, EDITAL 03/2021/PRPI/UFCA - CHAMADA PIICT UFCA/FUNCAP/CNPQ.

um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Além disso, nossa propriedade desejada é a de que o grafo resultante seja bipartido. Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ é *bipartizante* se $G - M$ é bipartido. Ao contrário das versões de otimização e de decisão do problema de remoção de arestas, existem grafos que não admitem tais emparelhamentos, como o grafo completo com 5 vértices, K_5.

De fato, [Lima et al. 2021] mostraram que decidir se um grafo admite um emparelhamento bipartizante é NP-completo, mesmo para grafos planares com grau máximo 4. Por outro lado, o problema é polinomial para grafos com grau máximo no máximo 3, grafos livres de *garra* ($K_{1,3}$) e *pata* ($K_{1,3} + e$), grafos que possuem apenas triângulos como ciclos ímpares e grafos que admitem conjunto dominante de tamanho pequeno [Lima et al. 2021]. Como K_5 não admite um emparelhamento bipartizante e o problema é fechado para subgrafos, então grafos que possuem um emparelhamento bipartizante têm clique máxima de tamanho no máximo 4. Este último fato junto à caracterização de grafos livres de P_5 [Camby and Schaudt 2016] e o resultado de [Lima et al. 2021] sobre a existência de algoritmo polinomial para grafos com conjunto dominante pequeno, mostram que também é possível obter um algoritmo polinomial para grafos livres de P_5. No mesmo artigo também é provado que o problema é FPT quando parametrizado pela *clique-width*, o que gera um algoritmo polinomial para grafos cordais. Além disso, é apresentado um algoritmo FPT quando parametrizado pelo tamanho de uma cobertura mínima e também quando parametrizado pelo número de diversidade de vizinhança.

De fato, determinar a existência de um emparelhamento bipartizante é equivalente a decidir se um grafo admite uma 2-coloração imprópria dos vértices onde cada classe de cor induz um subgrafo cujo grau máximo é no máximo 1. De modo geral, uma (k, d)-*coloração* de $G = (V, E)$ é uma k-coloração de $V(G)$ em que cada classe de cor induz um grafo de grau máximo no máximo d [Borodin et al. 2013]. Logo um grafo admite um emparelhamento bipartizante se e somente se admite uma $(2, 1)$-coloração.

Versões similares do problema foram estudadas na literatura, como a de determinar se um dado grafo admite um emparelhamento cuja remoção gera uma floresta, ou seja, um grafo acíclico [Protti and Souza 2018, Lima et al. 2017]. De fato, aplicações do problema de obter um emparelhamento bipartizante surgem dos algoritmos distribuídos ou concorrentes e seus grafos de dependências entre os processos. Eliminar dependências específicas entre alguns processos pode levar a computação a sair de um estado de *deadlock*, por exemplo. Ao mesmo tempo, não é desejável eliminar muitos recursos já obtidos por cada processo, o que leva ao questionamento se é possível eliminar algumas dependências (arestas) de modo que cada processo perca uma quantidade limitada de recursos já disponíveis para executar sua computação. A eliminação destes ciclos de dependências é o objetivo nestes casos, dando origem as versões de eliminação de alguns ou de todos os ciclos, com a restrição de que cada vértice perca uma pequena quantidade de arestas.

Neste trabalho mostramos que o problema de determinar se um grafo livre de P_6 admite um emparelhamento bipartizante admite um algoritmo polinomial, estendendo o resultado de [Lima et al. 2021] para grafos livres de P_5.

2. Algoritmo Polinomial para Grafos Livres de P_6

Em [van 't Hof and Paulusma 2010] os autores apresentam uma caracterização dos grafos livres de P_6, ou seja, os grafos que não admitem P_6 como subgrafo induzido. Note que esta classe contém os grafos livres de P_5. Um *conjunto dominante* $D \subseteq V(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices tal que todo vértice $u \in V(G) \setminus D$ possui algum vizinho $v \in D$, nesse caso dizemos que v *domina* u e que u é *dominado* por v.

Teorema 1. *[van 't Hof and Paulusma 2010] Um grafo $G = (V, E)$ é livre de P_6 se e somente se todo subgrafo conexo induzido H de G possui um conjunto dominante D tal que D é isomorfo a C_6 ou D possui um subgrafo gerador bipartido completo.*

Além disso, eles apresentam um algoritmo que encontra tal conjunto dominante para G em tempo $O(n^3)$. O resultado de [Lima et al. 2021], para o caso em que o conjunto dominante é isomorfo a um C_6, se aplica. De fato, [Lima et al. 2021] apresentam um algoritmo XP cujo parâmetro é o tamanho do conjunto dominante. Dessa forma, podemos supor que G é um grafo conexo livre de P_6 e que possui um conjunto dominante D que contém um subgrafo gerador bipartido completo H_D de tamanho não limitado.

Sejam A_D e B_D as partes de $V(H_D)$ que definem sua bipartição como descrito pelo Teorema 1, para algum conjunto dominante D de G. A seguir, apresentamos um algoritmo polinomial para grafos livres de P_6. A ideia consiste em estender uma pré-coloração de H_D de modo que A_D e B_D recebam cores distintas, obtendo assim uma $(2, 1)$-coloração de G. Se tal extensão não for possível, então G não admite uma $(2, 1)$-coloração.

Lema 2. *Suponha $|A_D| \geq 2$ e $|B_D| \geq 2$. Se G admite uma $(2, 1)$-coloração, então podemos estender a coloração em que A_D é colorido com a cor 1 e B_D é colorido com a cor 2 a uma $(2, 1)$-coloração de G.*

Note que, se $|A_D| = 1$ (resp. $|B_D| = 1$), podemos transferir um vértice de B_D (resp. A_D) para A_D (resp. B_D) obtendo um novo conjunto dominante D' particionado em dois conjuntos satisfazendo a condição do Lemma 2. A seguir, mostramos como estender a $(2, 1)$-coloração de H_D para os demais vértices, iterativamente, caso alguma tal coloração exista. Caso este procedimento falhe, então o Lemma 2 garante que G não admite uma $(2, 1)$-coloração. Considere $V(G) \setminus D = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e seja $D^0 = D$ e $D^i = D^{i-1} \cup \{v_i\}$, $1 \leq i \leq k$. Para cada vértice $v_i \in V(G) \setminus D$, $1 \leq i \leq k$, se:

- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$ e $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \leq 1$, então $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \leq 1$ e $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$, então $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $\Delta(G[A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$ e $\Delta(G[B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}]) \geq 2$, então G não admite uma $(2, 1)$-coloração, pelo Lemma 2;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$, $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \emptyset$ e u é saturado em $G[A_{D^{i-1}}]$, então $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$, $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \emptyset$ e u é saturado em $G[B_{D^{i-1}}]$, então $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$, $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$ e u é saturado em $G[A_{D^{i-1}}]$, mas w não é saturado em $G[B_{D^{i-1}}]$, então $B_{D^i} \leftarrow B_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$, $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$ e w é saturado em $G[B_{D^{i-1}}]$, mas u não é saturado em $G[A_{D^{i-1}}]$, então $A_{D^i} \leftarrow A_{D^{i-1}} \cup \{v_i\}$;
- $N_{A_{D^{i-1}}}(v_i) = \{u\}$, $N_{B_{D^{i-1}}}(v_i) = \{w\}$, tal que u é saturado em $G[A_{D^{i-1}}]$ e w é saturado em $G[B_{D^{i-1}}]$, então G não admite uma $(2, 1)$-coloração;

Note que nos passos acima os vértices são alocados de forma imperativa e segura. Sejam A' e B' os novos conjuntos obtidos de A_D e B_D pelos passos acima, respectivamente. Podemos classificar os vértices de $V' = V(G) \setminus \{A' \cup B'\}$ como: $X = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 1$ e $d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 0\}$; $Y = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 0$ e $d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 1\}$; e $Z = \{u \in V' : d_{G[A' \cup \{u\}]}(u) = 1$ e $d_{G[B' \cup \{u\}]}(u) = 1\}$. Além disso, cada vizinho $w \in (A' \cup B')$ de $u \in V'$ é não saturado em sua própria parte e pertence a D.

Teorema 3. *Se G admite uma $(2, 1)$-coloração, então podemos alocar os vértices de $Z \cup X \cup Y$ corretamente na bipartição de $G[V(G) \setminus \{Z \cup X \cup Y\}]$ em tempo polinomial.*

3. Conclusões e Trabalhos Futuros

Apresentamos um algoritmo polinomial para determinar se um grafo livre de P_6 admite um emparelhamento bipartizante, estendendo o resultado de [Lima et al. 2017] para grafos livres de P_5. Porém, permanece aberto a determinação de um algoritmo FPT parametrizado pelo tamanho do conjunto dominante. Também se encontra pouco explorada a versão de otimização deste problema, onde busca-se minimizar o número de arestas do emparelhamento a serem removidas.

Referências

Alon, N. and Stav, U. (2009). Hardness of edge-modification problems. *Theoretical Computer Science*, 410(47–49):4920 – 4927.

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London.

Borodin, O., Kostochka, A., and Yancey, M. (2013). On 1-improper 2-coloring of sparse graphs. *Discrete Mathematics*, 313(22):2638–2649.

Burzyn, P., Bonomo, F., and Durán, G. (2006). Np-completeness results for edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 154(13):1824–1844.

Camby, E. and Schaudt, O. (2016). A new characterization of P_k-free graphs. *Algorithmica*, 75(1):205–217.

Furmańczyk, H., Kubale, M., and Radziszowski, S. (2015). On bipartization of cubic graphs by removal of an independent set. *Discrete Applied Mathematics*. In Press, Corrected Proof.

Guillemot, S., Havet, F., Paul, C., and Perez, A. (2012). On the (non-)existence of polynomial kernels for p-free edge modification problems. *Algorithmica*, 65(4):900–926.

Lima, C., Rautenbach, D., Souza, U., and Szwarcfiter, J. (2021). On the computational complexity of the bipartizing matching problem. In Press.

Lima, C. V., Rautenbach, D., Souza, U. S., and Szwarcfiter, J. L. (2017). Decycling with a matching. *Information Processing Letters*, 124:26–29.

Natanzon, A., Shamir, R., and Sharan, R. (2001). Complexity classification of some edge modification problems. *Discrete Applied Mathematics*, 113(1):109–128. Selected Papers: 12th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science.

Protti, F. and Souza, U. S. (2018). Decycling a graph by the removal of a matching: new algorithmic and structural aspects in some classes of graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 20 no. 2.

van 't Hof, P. and Paulusma, D. (2010). A new characterization of p_6-free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158(7):731–740. Third Workshop on Graph Classes, Optimization, and Width Parameters Eugene, Oregon, USA, October 2007.

Yannakakis, M. (1981). Edge-deletion problems. *SIAM Journal on Computing*, 10(2):297–309.