Cobertura de grafos aleatórios por caminhos multicoloridos*

Antônio Kaique[1], Guilherme O. Mota[1], Tássio Naia[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo (USP)
São Paulo – SP – Brasil

{antoniokaique, mota}@ime.usp.br, tnaia@member.fsf.org

Abstract. *Let $G = G(n,p)$ be the binomial random graph. We prove that if $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$, then with high probability every proper edge-colouring of G admits a collection of $\mathrm{O}(n)$ rainbow paths which together cover $E(G)$, where a copy of a graph is* rainbow *if each of its edges is coloured with a unique colour.*

Resumo. *Seja $G = G(n,p)$ o grafo aleatório binomial. Provamos que se $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$, então com alta probabilidade toda aresta-coloração própria de G admite uma cobertura de $E(G)$ por $\mathrm{O}(n)$ caminhos multicoloridos, em que uma cópia de um grafo é dita* multicolorida *se todas as suas arestas possuem cores distintas.*

1. Introdução

Uma *aresta-coloração* de um grafo G é uma função $f\colon E(G) \to \mathbb{N}$. Se não existem arestas de mesma cor incidentes a um vértice, dizemos que a coloração é *própria* e que G é *propriamente aresta-colorido* por f. Note que em uma coloração própria, para cada cor c, o conjunto das arestas coloridas com c é um emparelhamento.

Estamos interessados no seguinte problema, proposto em [Bonamy et al. 2023], em que um grafo é dito *multicolorido* se todas as suas arestas possuem cores distintas. Ademais, uma *cobertura por caminhos* de G é um conjunto de caminhos cuja união contém todas as arestas de G.

Problema 1. *Existe uma constante universal c tal que todo grafo G com n vértices propriamente aresta-colorido admite uma cobertura por cn caminhos multicoloridos?*

Investigamos o Problema 1 para o grafo aleatório binomial $G(n,p)$, que é o grafo com n vértices em que cada par de vértices é uma aresta do grafo com probabilidade p e isso é feito de forma independente para todos os pares de vértices. Nosso resultado principal implica que quase todo grafo com n vértices admite a cobertura desejada usando $\mathrm{O}(n)$ caminhos.

Teorema 2. *Suponha que $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$ e seja $G = G(n,p)$. Então com alta probabilidade toda aresta-coloração própria de G admite uma cobertura de $E(G)$ por $\mathrm{O}(n)$ caminhos multicoloridos.*

---

*Guilherme O. Mota foi apoiado pelo CNPq (306620/2020-0, 406248/2021-4) e pela FAPESP (2018/04876-1, 2019/13364-7). Tássio Naia foi apoiado pela FAPESP (2019/04375-5). Antônio Kaique foi apoiado pela CAPES (88882.328155/2015-01). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, (CAPES), Código de Financiamento 001. CNPq é o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil. FAPESP é a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Observamos que $\mathrm{O}(n)$ caminhos multicoloridos são suficientes quando $G(n,p)$ é esparso, e são necessários quando $G(n,p)$ é razoavelmente denso. De fato, se $p = \mathrm{O}(1/n)$, então com alta probabilidade $|E(G(n,p))| \leq n^2p = \mathrm{O}(n)$ e podemos cobrir $G(n,p)$ com $\mathrm{O}(n)$ caminhos multicoloridos tomando cada aresta de G como um caminho por si só. Por outro lado, quando $p = \Omega(1/n)$, não é possível garantir uma cobertura de $G = G(n,p)$ por $o(n)$ caminhos multicoloridos para toda coloração própria de G. De fato, Ajtai, Komlós e Szemerédi demonstraram que para todo $\varepsilon > 0$ existe $c = c(\varepsilon)$ tal que com alta probabilidade $G = G(n,(1+\varepsilon)/n)$ contém um caminho com cn vértices [Ajtai et al. 1981]. Isto implica que com alta probabilidade existe uma coloração própria de G em que alguma cor é usada em $cn/2$ arestas (basta que arestas alternantes em um caminho mais longo de G recebam a mesma cor). Nessa coloração, claramente, uma cobertura por caminhos multicoloridos tem tamanho pelo menos $cn/2$.

Demonstramos o Teorema 2 na Seção 3, após enunciarmos na Seção 2 os resultados auxiliares que empregamos. Por fim, discutimos problemas em aberto relacionados com o Problema 1 na Seção 4.

2. Resultados auxiliares

O seguinte lema garante concentração, em $G(n,p)$, dos graus dos vértices e dos números de arestas entre conjuntos disjuntos suficientemente grandes em $G(n,p)$, sempre que $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$. Esse resultado pode ser facilmente verificado utilizando os limitantes de Chernoff e a cota da união. Demonstrações de resultados padrões como esse podem ser encontradas no livro de Janson, Łuczak e Ruciński [Janson et al. 2000]. Dados um grafo G e conjuntos disjuntos $X, Y \subset V(G)$, utilizamos $e(X,Y)$ para denotar a quantidade de arestas entre X e Y.

Lema 3. *Se $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$, então para todo $\varepsilon > 0$, com alta probabilidade $G = G(n,p)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $v \in V(G)$, temos que $|d_G(v) - np| \leq \varepsilon np$;
(ii) Para todos conjuntos disjuntos $X, Y \in V(G)$ com $|X|, |Y| \gg (\ln n)/p$, temos que $|E(X,Y)| = (1 \pm \varepsilon)|X||Y|p$.

Na estratégia utilizada para provar o Teorema 2, conectamos emparelhamentos multicoloridos de modo a obter os caminhos multicoloridos desejados. Partimos da decomposição em emparelhamentos fornecida pelo fato a seguir.

Fato 4. *Seja G um grafo propriamente aresta-colorido com n vértices. Então é possível particionar $E(G)$ em $\lfloor 5n/2 \rfloor$ emparelhamentos multicoloridos.*

Demonstração. Seja $t = \lfloor 5n/2 \rfloor$. Iremos construir emparelhamentos $M_1, \ldots M_t$ (inicialmente vazios), adicionando gulosamente as arestas de G a algum dos emparelhamentos M_j.

Dada uma aresta uv de G, como a coloração de G é própria, há no máximo $\lfloor n/2 \rfloor$ outras arestas com cor igual à cor atribuída a uv. Ademais, há no máximo $2(n-1)$ arestas diferentes de uv que contém u ou v. Note que cada emparelhamento M_i contém no máximo uma aresta com extremo em u, no máximo uma aresta com extremo em v, e no máximo uma aresta com a mesma cor que uv. Como $t = \lfloor 5n/2 \rfloor > 2(n-1) + \lfloor n/2 \rfloor$, existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que uv pode ser adicionada ao emparelhamento M_j. Iterando este argumento para cada aresta de G produz os emparelhamentos desejados. $\square$

3. Prova do resultado principal

Nesta seção provamos o Teorema 2, i.e., se $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$, então com alta probabilidade é possível cobrir as arestas de $G(n,p)$ por $\mathrm{O}(n)$ caminhos multicoloridos.

Demonstração do Teorema 2. Fixe $\varepsilon < 1/160$, seja n suficientemente grande e sejam $p \gg (\frac{\ln n}{n})^{1/2}$ e $G = G(n,p)$. Considere uma coloração própria das arestas de G. Com alta probabilidade G satisfaz às propriedades *(i)* e *(ii)* do Lema 3 (aplicado com o mesmo parâmetro ε). Consequentemente, também temos que $|E(G)| \leq n^2 p$. Assim, de agora em diante, assumiremos que G satisfaz a *(i)* e *(ii)*.

Considere uma coleção de $\lfloor 5n/2 \rfloor$ emparelhamentos multicoloridos obtidos aplicando o Fato 4. Note que, particionando cada um desses emparelhamentos em emparelhamentos disjuntos com $\lceil \varepsilon np \rceil$ arestas e no máximo um emparelhamento com menos do que $\lceil \varepsilon np \rceil$ arestas, obtemos uma nova partição $\mathcal{M}$ de $E(G)$ em emparelhamentos multicoloridos tal que

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{|E(G)|}{\varepsilon np} + \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor \leq n\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{2}\right).$$

Dado um emparelhamento $M = \{e_1, \ldots, e_r\}$ em $\mathcal{M}$ (note que $r \leq \lceil \varepsilon np \rceil$), construiremos gulosamente um caminho multicolorido em que, para cada $1 \leq i < r$, as arestas e_i e e_{i+1} de M são conectadas por um caminho de comprimento no máximo 4 (composto por arestas que não estão em M).

Seja P_1 o caminho composto apenas por e_1. Para $2 \leq i \leq r-1$, suponha que existe um caminho multicolorido P_i tal que $P_{i-1} \subset P_i$ com $|E(P_i) \setminus E(P_{i-1})| \leq 5$ e $e_i \in E(P_i)$. Fixe $2 \leq i \leq r-1$. Mostraremos como construir P_{i+1} com essas propriedades. Começamos destacando alguns vértices e arestas: seja x a extremidade de P_i que não está em e_1 e seja $e_{i+1} = yz$ e seja L_i a coleção de caminhos induzida por $E(P_i) \cup E(M)$.

Dizemos que $v \in N(x) \cup N(y)$ é ***ruim*** se $v \in V(L_i)$ ou se $\{xv, yv\} \cap E(G)$ contém uma aresta cuja cor foi utilizada em arestas de L_i. Defina R_x e R_y, respectivamente, como os conjuntos dos vértices ruins em $N(x)$ e $N(y)$. Como $|V(L_i)| \leq 2|M| + 3(i-1) \leq 5\varepsilon np$ e $|E(L_i)| \leq |M| + 4(i-1) \leq 5\varepsilon np$, temos que $|R_x|, |R_y| \leq 5\varepsilon np + 5\varepsilon np = 10\varepsilon np$. Defina $B_x = N(x) \setminus R_x$ e $B_y = N(y) \setminus R_y$. Por *(i)*, temos que

$$|B_x|, |B_y| \geq np(1-\varepsilon) - 10\varepsilon np = np(1 - 11\varepsilon).$$

Denote por $N(B_x)$ o conjunto contendo todos os vizinhos de vértices de B_x. Definimos W como o conjunto dos vértices $v \in N(B_x) \setminus V(L_i)$ em que existe $x' \in B_x$ tal que $P_i x x' v$ é um caminho multicolorido que evita as cores utilizadas em $e_{i+1}, \ldots, e_r$.

Defina $\overline{W} = V(G) \setminus W$. A seguir verificaremos que $|W| \geq (1 - 40\varepsilon)n$. Sejam $B'_x \subset B_x$ e $\overline{W}' \subset \overline{W}$ conjuntos disjuntos tais que $|B'_x| = |B_x|/2$ e $|\overline{W}'| = |\overline{W}|/2$ (tais conjuntos disjuntos sempre existem). Note que se $|\overline{W}'| < \varepsilon n$, então

$$|W| = n - |\overline{W}'| > (1 - \varepsilon)n.$$

Assim, podemos assumir que $|\overline{W}'| \geq \varepsilon n \gg (\ln n)/p$. Aplicando o Lema 3 *(ii)* com $X = B'_x$ e $Y = \overline{W}'$, concluímos que $e(B'_x, \overline{W}') \geq p|B'_x||\overline{W}'|/2$. Por outro lado, se um vértice $u \in B'_x$ possui vizinho $w \in \overline{W}'$, então $w \in L_i$ ou $c(uw)$ é uma cor usada em $E(L_i)$. Ademais, note que cada vértice de B'_x é adjacente a no máximo $5\varepsilon np$ vértices de $\overline{W}'$ que são vértices de L_i e também pode ser adjacente a outros $5\varepsilon np$ vértices de $\overline{W}'$ por meio de arestas cujas cores são utilizadas em arestas de L_i. Portanto,

$$\frac{|\overline{W}'|}{2} \leq e(B'_x, \overline{W}') \leq 10\varepsilon n.$$

Note então que $|\overline{W}'| \leq 20\varepsilon n$. Assim, como $|\overline{W}'| = |\overline{W}|/2$, concluímos que

$$|W| = n - |\overline{W}| \geq (1 - 40\varepsilon)n.$$

Precisamos encontrar vértices $x' \in B_x$ e $v \in W$, além de $y' \in B_y$ tais que v conecta $x' \in B_x$ e $y' \in B_y$, estendendo o caminho $P_i x'$ em duas arestas para formar um caminho multicolorido maior $P_i x' v y'$. Para isso, considere conjuntos disjuntos $B'_y \subset B_y$ e $W_{xy} \subset W$ tais que $|B'_y| = |B_y|/2$ e $|W_{xy}| = |W|/2$. Como $|B'_y|, |W_{xy}| \gg (\ln n)/p$, pelo Lema 3 *(ii)*, temos que

$$e(B'_y, W_{xy}) \geq p|B'_y||W_{xy}|(1 - \varepsilon) \geq \frac{p}{2}\left(\frac{np}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n^2p^2}{32}.$$

Como cada vértice de G é incidente a no máximo $|E(L_i)| \leq 5\varepsilon np$ arestas com cores em $E(L_i)$, temos que pelo menos $e(B'_y, W_{xy}) - |B'_y| 5\varepsilon np \geq n^2p^2/35$ arestas. Portanto, por um simples argumento de média, temos que existe $v \in W_{xy}$ tal que

$$e(\{v\}, B'_y) \geq \frac{np^2}{35} \gg \ln n.$$

Note que para cada $v \in W_{xy}$, não basta escolher um $y' \in B'_y$ qualquer adjacente a v, pois talvez a cor da aresta xx' seja a mesma das arestas vy' ou $y'y$, ou a cor da aresta $x'v$ seja a mesma cor de $y'y$, além de podermos ter $y' = x$. Mas isso nos proíbe de escolher no máximo 4 vértices em B'_y para cada $v \in W_{xy}$. Mas como vimos, $e(\{v\}, B'_y) \gg \ln n \geq 5$. Concluímos que existe uma escolha para v e y' tal que $P_{i+1} = P_i x' v y' y z$ é um caminho multicolorido que não utiliza cores das arestas de $M \setminus E(P_{i+1})$, finalizando a prova do teorema. $\square$

4. Considerações finais

Na Seção 1, observamos que para $p = O(n^{-1})$, com alta probabilidade é possível cobrir $G(n,p)$ com $O(n)$ caminhos multicoloridos em qualquer coloração própria de suas arestas. O Teorema 2 responde afirmativamente ao Problema 1 para $G(n,p)$ quando $p \gg \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}$. É natural buscar responder o Problema 1 para $c/n \leq p \leq ((\ln n)/n)^{1/2}$, em que c é uma constante absoluta. Um segundo problema natural é determinar, para $p = \mathrm{o}(n^{-1})$, o tamanho da menor cobertura por caminhos multicoloridos de $G(n,p)$ que é possível obter com alta probabilidade.

Referências

Ajtai, M., Komlós, J., and Szemerédi, E. (1981). The longest path in a random graph. *Combinatorica*, 1:1–12.

Bonamy, M., Botler, F., Dross, F., Naia, T., and Skokan, J. (2023). Separating the edges of a graph by a linear number of paths. Preprint arXiv:2301.08707.

Janson, S., Łuczak, T., and Ruciński, A. (2000). *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York.