Decomposição de Fluxos em Digrafos Arco-Coloridos

Cláudio Carvalho[1], Jonas Costa[1], Ana Karolinna Maia[1], Cláudia Linhares Sales[1]

[1]Departamento de Computação, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará
Fortaleza - CE, CEP 60440-900, Brasil.

{claudio,jonascosta}@lia.ufc.br, karolmaia@ufc.br, linhares@dc.ufc.br

Abstract. *Let $\mathcal{N}$ be a network over a digraph D and x be a feasible (s,t)-flow in $\mathcal{N}$. We say that x is ℓ-splittable if it can be decomposed into up to ℓ path-flows. In this paper, we consider the problem of obtaining a path decomposition in arc-coloured digraphs, such that the sum of the number of path colours is minimum. We show that, for a given flow x in a network $\mathcal{N}$ over an arc-coloured digraph and an integer k, it is $\mathcal{NP}$-complete to decide whether there is a decomposition of x into paths, such that the sum of the number of colours of the paths is at most k, and we show some cases for which this can be done in polynomial time.*

Resumo. *Sejam $\mathcal{N}$ uma rede sobre um digrafo D e x um (s,t)-fluxo viável em $\mathcal{N}$. Dizemos que x é ℓ-divisível se ele pode ser decomposto em até ℓ fluxos caminhos. Neste artigo, consideramos o problema de obter uma decomposição em caminhos em digrafos arco-coloridos, de modo que a soma do número de cores dos caminhos seja mínima. Nós mostramos que, dado fluxo x em uma rede $\mathcal{N}$ sobre um digrafo arco-colorido e um inteiro k, é $\mathcal{NP}$-completo decidir se há uma decomposição de x em caminhos, tal que a soma do número de cores dos caminhos seja no máximo k, e mostramos alguns casos para os quais isso pode ser feito em tempo polinomial.*

1. Introdução

O problema de *fluxo de multicomódites* consiste em encontrar um fluxo que satisfaça todas as demandas de cada comódite entre uma origem e um destino, respeitando as capacidades dos arcos. Em [Kleinberg 1996], foi introduzido o problema de *fluxos indivisíveis*; que pode ser visto como uma versão restrita de fluxo de multicomódites onde a demanda de cada uma destas deve ser enviada por um único caminho. O autor mostrou que esse problema compreende vários problemas $\mathcal{NP}$-Completos, como os de particionamento, escalonamento, empacotamento, roteamento em circuitos virtuais etc.

Em [Baier et al. 2005], foi proposta uma generalização para o problema de fluxos indivisíveis, que pode ser aplicada a uma ou mais comódites, e a demanda de cada uma destas deve ser enviada por um número restrito e possivelmente diferente de caminhos. Trata-se do problema de *fluxos divisíveis*. Problemas desse tipo acontecem, por exemplo, em redes de comunicação, onde os clientes podem demandar conexões com determinadas capacidades entre dados pares de nós. Se as capacidades demandadas são altas, fica inviável para o administrador da rede atendê-las de forma indivisível. Por outro lado, o cliente pode não querer lidar com muitas conexões de pequenas capacidades.

De acordo com [Granata et al. 2013], digrafos coloridos são usados para modelar situações onde é crucial representar diferenças qualitativas (em vez de quantitativas) em diferentes regiões do próprio digrafo. Cada cor pode representar uma propriedade a ser modelada. Problemas desse tipo têm aplicações em diversas áreas como redes de comunicação, redes de transporte multimodal, biologia molecular, entre outras.

Neste artigo, apresentamos uma combinação do problema de decomposição de fluxos em caminhos com o de caminhos com menor número de cores. Dados uma rede sobre um digrafo arco-colorido e um fluxo x nesta, o objetivo é decompor x em caminhos, de modo que a soma do número de cores usadas nestes seja mínima. Mostramos que o problema de decisão associado é $\mathcal{NP}$-Completo, e apresentamos alguns casos em que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial.

2. Definições e Terminologias

De maneira simplificada, uma *rede* é um (multi)digrafo $D = (V, A)$ associado com uma função de capacidade $u : A \to \mathbb{Z}_+$, e é representada por $\mathcal{N} = (D, u)$. Quando D for um digrafo simples, representamos um arco de um vértice i para um vértice j simplesmente por ij. As cardinalidades de V e de A são denotadas, respectivamente, por n e por m. Denotamos por $D^c = (V, A, c)$ um (multi)digrafo $D = (V, A)$ com uma coloração de arcos $c : A \to \{1, 2, \ldots, p\}$ não necessariamente própria.

Um *fluxo* x em uma rede $\mathcal{N}(D, u)$ é uma função $x : A \to \mathbb{R}_+$. Dizemos que x é um *fluxo inteiro*, se $x(a) \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\, a \in A$; e que x é um *fluxo viável*, se $x(a) \leq u(a)$, $\forall\, a \in A$. Dizemos que x é λ-*uniforme*, se $x(a) = \lambda$, $\forall\, a \in A$. O *balanço* de um vértice v em relação a um fluxo x, denotado por $b_x(v)$, é a diferença da quantidade de fluxo que sai de v e a que entra em v. Uma *circulação* é um fluxo x em uma rede $\mathcal{N} = (D, u)$ em que $b_x(v) = 0$, para todo $v \in V$.

Seja uma função $f : A \to \mathbb{R}_+$. Denotamos por f_a o valor de $f(a)$. Assim, u_a, x_a e c_a representam, respectivamente, a capacidade, o valor de fluxo x e a cor do arco a.

Sejam s e t vértices distintos de uma rede $\mathcal{N} = (D, u)$. Em um (s, t)-*fluxo* x, temos: $b_x(s) = -b_x(t) = r$, para algum $r \in \mathbb{R}_+$; e $b_x(v) = 0$, para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$. O valor de um fluxo x desse tipo, denotado por $|x|$, é igual ao balanço de s em relação a x.

Um caminho (resp. ciclo) em uma rede $\mathcal{N} = (D, u)$ é um caminho (resp. ciclo) no (multi)digrafo $D = (V, A)$. Um *fluxo caminho* x ao longo de um caminho P (resp. *fluxo ciclo* ao longo de um ciclo C) em uma rede $\mathcal{N}$ é aquele em que $x_a = r$ para todo arco a de P (resp. de C), para algum valor positivo r. Um resultado clássico de [Ford Jr. and Fulkerson 1962] mostra que todo fluxo em uma rede pode ser decomposto em no máximo $n + m$ fluxos caminhos ou fluxos ciclos.

Segundo [Baier et al. 2005], um (s, t)-fluxo x em uma rede $\mathcal{N}$ é ℓ-*divisível* se puder ser representado por ℓ pares $(P_1, f_1), \ldots, (P_\ell, f_\ell)$, onde cada par representa um caminho P_i de s a t, com fluxo f_i ao longo deste; ou seja, se x puder ser decomposto em ℓ fluxos caminhos $x^1 \ldots x^\ell$, de modo que $\sum_{i=1}^{\ell} |x^i| = |x|$. Os caminhos de $x^1 \ldots x^\ell$ não precisam ser distintos. Assim, um fluxo ℓ-divisível também é ℓ'-divisível, para $\ell' > \ell$. Denotamos por $n_c(P)$ o número de cores no caminho P.

O problema que estamos propondo consiste em: dados uma rede $\mathcal{N} = (D^c, u)$ e um (s, t)-fluxo viável x sobre ela; desejamos encontrar uma decomposição (não necessariamente mínima) de x em ℓ fluxos caminhos, com o objetivo de minimizar o custo da solução, dado por $n_c(P_1, \ldots, P_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} n_c(P_i)$.

Na rede da Figura 1, os rótulos (a, x_a) nos arcos do multidigrafo indicam o arco e o seu valor de fluxo. O (s,t)-fluxo pode ser decomposto em seis fluxos caminhos, da seguinte forma: um monocromático $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$ de valor 2, três bicromáticos ($a_8a_2a_{11}$, $a_{12}a_4a_{15}$ e $a_{16}a_6a_{19}$) de valor 2, e dois bicromáticos ($a_1a_9a_3a_{13}a_5a_{17}a_7$ e $a_1a_{10}a_3a_{14}a_5a_{18}a_7$) de valor 1, com custo total 11. É possível obter um custo 7, usando sete fluxos caminhos monocromáticos, como segue: um de valor 4 $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$ e seis de valor 1 ($a_8a_9a_{11}$, $a_8a_{10}a_{11}$, $a_{12}a_{13}a_{15}$, $a_{12}a_{14}a_{15}$, $a_{16}a_{17}a_{19}$ e $a_{16}a_{18}a_{19}$).

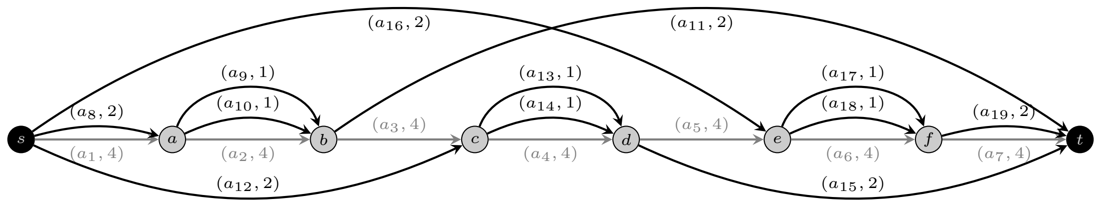

Figura 1. Exemplo de fluxo em uma rede sobre um multidigrafo arco-colorido

3. Complexidade

Com o Teorema 3.1, mostramos que o problema aqui proposto é NP-Completo, a partir do *Problema 3-Partição*. Segundo [Garey and Johnson 1979], este consiste em decidir se, dado um conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{3r}\}$ de valores inteiros positivos, cuja soma total é rT, é possível particioná-lo em r subconjuntos de 3 elementos, tal que a soma dos elementos de cada subconjunto seja T. Os autores mostraram que esse problema é fortemente $\mathcal{NP}$-Completo, mesmo com a restrição $T/4 < a_i < T/2$, para $1 \leq i \leq 3r$.

Teorema 3.1. *Dados uma rede $\mathcal{N} = (D^c, u)$, um (s,t)-fluxo viável x e um inteiro positivo k; decidir se é possível decompor x em fluxos caminhos a um custo no máximo k é $\mathcal{NP}$-Completo.*

Demonstração. Claramente, esse problema está em $\mathcal{NP}$. Dada uma instância $S = \{a_1, \ldots, a_p\}$, com $p = 3r$, do problema 3-Partição, construímos uma rede $\mathcal{N}$ e definimos um (s,t)-fluxo viável x nesta, de valor rT, da seguinte maneira: $V = \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_r, q, s, t\}$, $A = \{sa_i, a_iq \mid 1 \leq i \leq p\} \cup \{qb_j, b_jt \mid 1 \leq j \leq r\}$, definimos $u_{sa_i} = u_{a_iq} = a_i$, $u_{qb_j} = u_{b_jt} = T$, fazemos $x_{ij} = u_{ij}$ para todo $ij \in A$ (isso é possível, pois $a_1 + \ldots + a_p = rT$), e definimos a coloração dos arcos como segue: $c_{sa_i} = c_{a_iq} = r + 1$ e $c_{qb_j} = c_{b_jt} = j$. Por fim, fazemos $k = 2p = 6r$. Isso está ilustrado na Figura 2 (o rótulo em cada arco indica a sua cor).

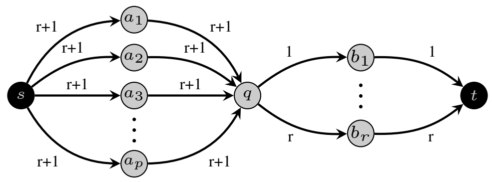

Figura 2. Construção de rede a partir de uma instância do 3-Partição

Se a resposta para o problema 3-Partição for sim, o fluxo pode ser decomposto em $3r$ fluxos caminhos de custo 2 da seguinte forma: seja $\{S_1, \ldots, S_r\}$ uma solução para o primeiro problema. Para cada $a_i \in S_j$, com $1 \leq j \leq r$, existe um fluxo caminho sa_iqb_jt com valor a_i, usando duas cores (j e $r+1$), na rede.

Considere que o (s,t)-fluxo x na rede $\mathcal{N}$ definidos acima pode ser decomposto em fluxos caminhos a um custo total $k = 6r$. Como cada fluxo caminho de s a t usa duas cores, precisamos de $3r$ fluxos caminhos. Cada vértice a_i, para $1 \leq i \leq p$, deve estar em exatamente um fluxo caminho, cujo valor é a_i. Note que há exatamente três fluxos caminhos com um vértice b_j em comum, para $1 \leq j \leq r$, pela restrição para os valores de a_i ($T/4 < a_i < T/2$). Sejam eles sa_xqb_jt, sa_yqb_jt e sa_zqb_jt. Para cada três fluxos caminhos desses, construímos um subconjunto $\{a_x, a_y, a_z\}$, com $a_x + a_y + a_z = T$. $\square$

4. Casos Polinomiais

Teorema 4.1. *Dados uma rede $\mathcal{N} = (D^c, u)$, com $D^c = (V, A, c)$ e $c : A \to \{1, 2\}$, e um (s,t)-fluxo viável x λ-uniforme. É possível encontrar o custo mínimo de uma decomposição de x em fluxos caminhos em tempo polinomial.*

Demonstração. Como x é λ-uniforme, ele pode ser decomposto em $p = |x|/\lambda$ fluxos caminhos de valor λ. Tomemos uma rede $\mathcal{N}^k = (D^k, u^k)$, com $D^k = (V, A^k)$, a partir de $\mathcal{N}$ e de x, apenas com os arcos de cor k, e fazendo $u^k_a = x_a$, $\forall\, a \in A^k$, para $k \in \{1, 2\}$; calculamos o fluxo máximo f^k e temos a quantidade de fluxos caminhos neste, que é $p_k = |f^k|/\lambda$. Logo, a quantidade de fluxos caminhos bicromáticos é $p_{12} = p - p_1 - p_2$. O custo dessa solução é $p_1 + p_2 + 2 \times p_{12}$, que é mínimo, pois p_1 e p_2 são máximos. $\square$

Esse resultado pode ser generalizado para redes com duas cores, considerando que o fluxo nos arcos de cor 1 é igual a λ, e nos de cor 2 é $k\lambda$, para um inteiro positivo k.

5. Considerações Finais

Pela redução apresentada no Teorema 3.1, observa-se que o problema proposto é $\mathcal{NP}$-Completo mesmo para redes definidas em digrafos acíclicos e planares. Uma linha natural de pesquisa futura é investigar a existência de algoritmos aproximativos para o mesmo. Considerando que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial para fluxos uniformes em digrafos com duas cores, um próximo passo pode ser investigar a complexidade do mesmo problema, considerando três cores.

Referências

Baier, G., Köhler, E., and Skutella, M. (2005). The k-splittable flow problem. *Algorithmica*, 42(3–4).

Ford Jr., L. R. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1 ed.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman, 1 ed.

Granata, D., Cerulli, R., Scutellà, M. G., and Raiconi, A. (2013). Maximum flow problems and an NP-Complete variant on edge-labeled graphs. In Pardalos, P. M., Du, D.-Z., and Graham, R. L., editors, *Handbook of Combinatorial Optimization*, pages 1913–1948. Springer New York, New York, NY.

Kleinberg, J. M. (1996). Single-source unsplittable flow. In *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS '96*, pages 68–77, Burlington, Vermont. IEEE Computer Society.