Coloração total equilibrada dos snarks de Loupekine

Rieli Araújo[1], **Diana Sasaki**[1]

[1]Instituto de Matemática (IME) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

rieli.araujo@pos.ime.uerj.br, diana.sasaki@ime.uerj.br

Abstract. *In 2016, Dantas et al. proposed the question about the existence of a Type 1 cubic graph with girth at least 5 and equitable total chromatic number 5, which motivated our result. We prove that all graphs of the second family of Loupekine snarks have equitable total chromatic number 4, contributing as a negative evidence to the question.*

Resumo. *Em 2016, Dantas et al. levantaram o questionamento se existe um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 e que possua número cromático total equilibrado 5, o que motivou este trabalho. Nós provamos que todos os snarks da segunda família de Loupekine possuem número cromático total equilibrado 4 contribuindo para esta questão como uma evidência negativa.*

1. Coloração total equilibrada

Uma *coloração total* de um grafo é uma atribuição de cores tanto para os seus vértices, quanto para as suas arestas de forma que não tenhamos cores iguais atribuídas aos elementos adjacentes e incidentes. Quando uma coloração total do grafo utilizar um conjunto de k cores, chamaremos esta de *k-coloração total* e o *número cromático total* de G, denotado por $\chi''(G)$, é o menor k para o qual G possui uma k-coloração total. É claro ver que o $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G.

Conjectura 1 (Conjectura da Coloração Total (TCC))**.** *[Vizing 1964, M.Behzad 1965] O número cromático total de um grafo simples $\chi''(G)$ é no máximo $\Delta(G) + 2$.*

A Conjectura da Coloração Total foi demonstrada para grafos cúbicos [Rosenfeld 1971]. Assim, temos que o número cromático total dos grafos cúbicos é 4 (chamados *Tipo 1*) ou 5 (chamados *Tipo 2*). Uma coloração total é *equilibrada* quando as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1. De forma análoga ao número cromático total, o *número cromático total equilibrado* $\chi''_e(G)$ é o menor k para o qual G possui uma k-coloração total equilibrada.

Conjectura 2 (Conjectura da Coloração Total Equilibrada (ETCC))**.** *[Wang 2002] O número cromático total equilibrado de um grafo simples $\chi''_e(G)$ é no máximo $\Delta(G) + 2$.*

De forma análoga, [Wang 2002] verificou que a Conjectura da Coloração Total Equilibrada é válida para os grafos cúbicos e assim o número cromático total equilibrado destes é 4 ou 5. Existem infinitos grafos cúbicos Tipo 1 com $\chi''_e(G) = 5$ [Dantas et al. 2016], porém até o momento, todos possuem cintura menor que 5.

2. Grafos snarks

Snarks são grafos cúbicos, simples e sem pontes que não possuem uma 3-coloração de arestas. Estes grafos receberam este nome em 1976 pelo matemático Martin Gardner, em homenagem ao poema de Lewis Carrol *"The Hunting of the snark"* [Gardner 1976] por ser um grafo difícil de se encontrar no contexto do famoso Teorema das Quatro Cores. De fato, apesar de só terem recebido este nome em 1976, os snarks tiveram sua primeira aparição em [Tait 1880], em seus estudos sobre o Teorema das Quatro Cores. Desde então, os snarks vêm tendo um papel importante na Teoria dos Grafos , principalmente como contra-exemplos para conjecturas.

Motivados pela questão proposta por [Dantas et al. 2016]: **Existe um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 e que tenha o número cromático total equilibrado 5?**, [Cordeiro et al. 2017] provaram que todos os snarks da primeira família de Loupekine possuem uma 4-coloração total equilibrada. Mais anteriormente, [Sasaki et al. 2014] apresentaram 4-colorações totais para todos os grafos das duas famílias de Loupekine, mas estas não são equilibradas. Assim, neste trabalho continuamos a investigação da questão, apresentando 4-colorações totais equilibradas para todos os snarks da segunda família de Loupekine, contribuindo com a questão como evidência negativa.

2.1. Os snarks de Loupekine

Foi também em 1976 que surgiram as duas famílias de snarks de Loupekine ([Isaacs 1976]). Os primeiros grafos destas famílias possuem 22 vértices e 33 arestas. A construção da segunda família de Loupekine acontece da seguinte forma. A partir do grafo inicial L_0 apresentado na Figura 2, estendemos a família infinitamente através do processo iterativo de adicionar o bloco de ligação B, destacado na Figura 1, sem perder as propriedades dos snarks. Para exemplificar, considere o snark L_1 apresentado na Figura 4, obtido através da adição de um bloco de ligação.

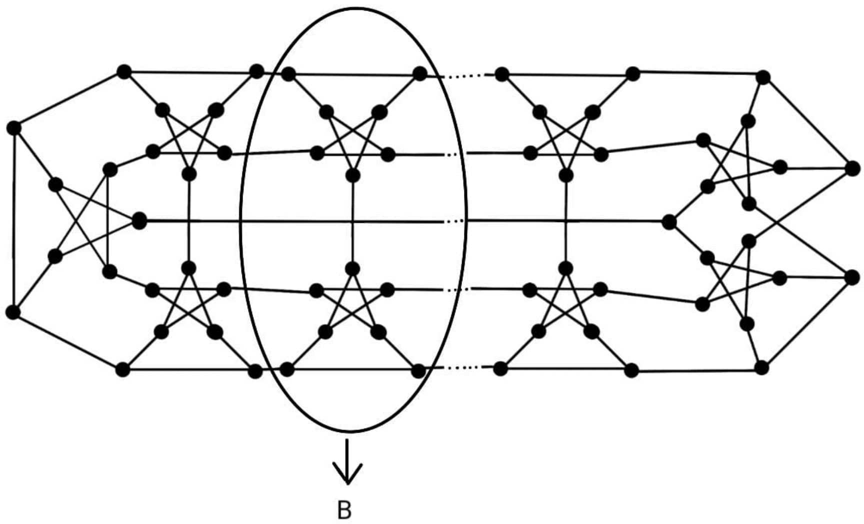


Figura 1. Esquema da construção dos snarks de Loupekine L_n.

3. Resultado

Teorema 1. *Todos os snarks da segunda família infinita de Loupekine possuem número cromático total equilibrado 4.*

Ideia da prova De início, obtivemos a 4-coloração total equilibrada do grafo L_0 apresentada na Figura 2. Esta coloração é preservada nas colorações de todos os grafos da família.

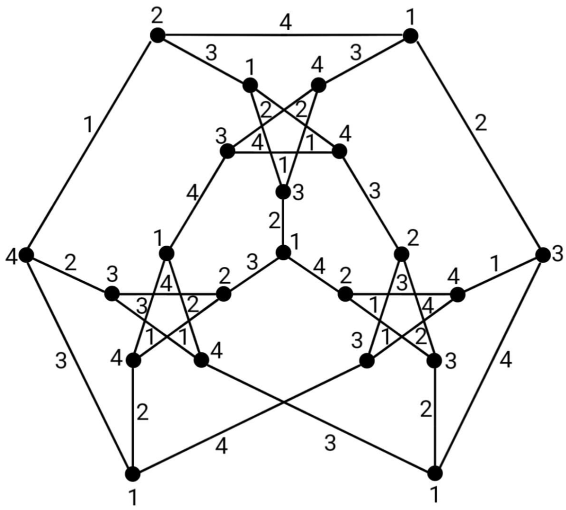
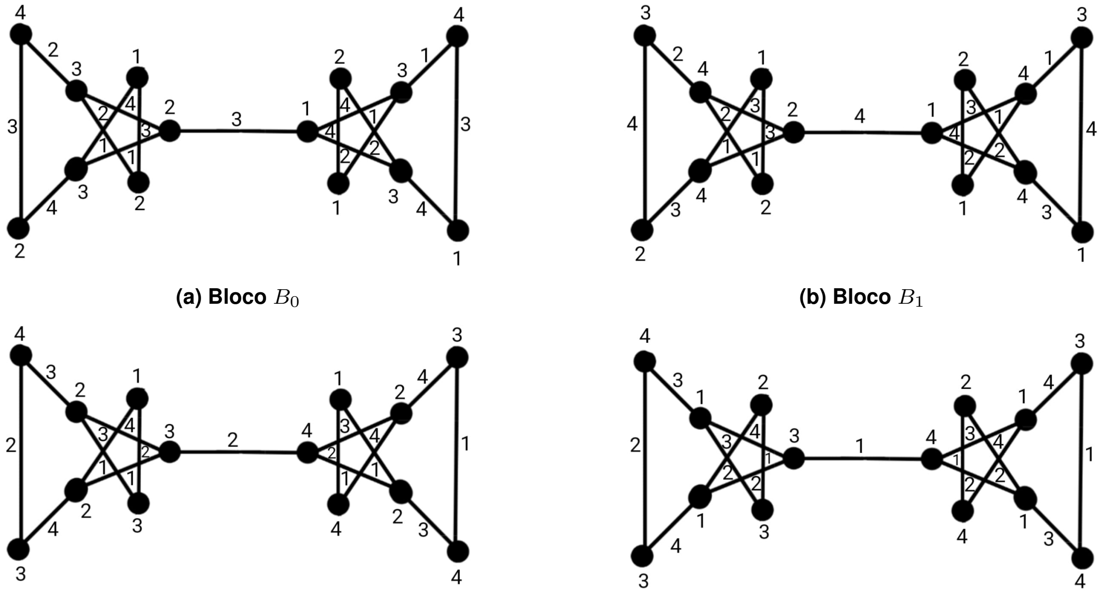


Figura 2. Uma 4-coloração total equilibrada para o snark de Loupekine L_0.

Pelo comportamento de crescimento da família e de forma a obter 4-colorações totais equilibradas, foram necessárias quatro colorações totais distintas do bloco de ligação. Isto foi feito para que a adição de cada bloco não tivesse conflito de cores com a coloração do grafo anterior e para que as colorações preservassem a propriedade de serem equilibradas. As colorações totais do bloco B, chamadas de B_0, B_1, B_2 e B_3, estão apresentadas nas Figuras 3a, 3b, 3c, 3d, respectivamente, e um resumo até o L_5 das 4-colorações totais equilibradas da família está apresentado na Tabela 1. Já para o caso geral temos que a coloração do grafo L_n é obtida por $L_{n-1} + B_{n(mod\ 4)}$.

Resumo das 4-colorações totais equilibradas dos primeiros snarks da segunda família de Loupekine						
	Configuração	# elementos	Cor 1	Cor 2	Cor 3	Cor 4
Grafo Inicial L_0	L_0	55	14	13	14	14
Grafo L_1	L_0 + B_0	90	23	22	23	22
Grafo L_2	L_1 + B_1	125	32	31	31	31
Grafo L_3	L_2 + B_2	160	40	40	40	40
Grafo L_4	L_3 + B_3	195	49	48	49	49
Grafo L_5	L_4 + B_0	230	58	57	58	57

Tabela 1. O esquema das 4-colorações totais equilibradas dos primeiros snarks da segunda família de Loupekine.



(a) **Bloco** B_0

(b) **Bloco** B_1

(c) **Bloco** B_2

(d) **Bloco** B_3

Figura 3. Bloco B com 4 colorações totais utilizadas na construção das 4-colorações totais equilibradas da segunda família de Loupekine.

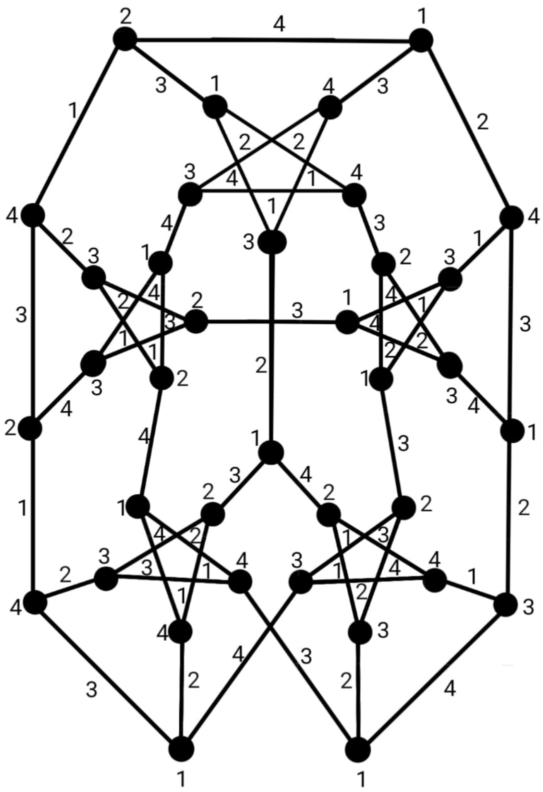


Figura 4. Snark L_1 com uma 4-coloração total equilibrada obtida pelo teorema.

Referências

Cordeiro, L., Dantas, S., and Sasaki, D. (2017). On equitable total colouring of loupekine snarks and their products. *Mat. Cont.*, 45:77–85.

Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., Mazzuoccolo, G., Preissman, M., dos Santos, V. F., and Sasaki, D. (2016). On the equitable total chromatic number of cubic graphs. *Discrete Appl. Math.*, 209:84–91.

Gardner, M. (1976). Mathematical games: Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem. *Sci. Am.*, pages 126–130.

Isaacs, R. (1976). Loupekhine's snarks: A bi-family of non-tait-colorable graphs. *Tec. Report*.

M.Behzad (1965). *Graphs and Their Chromatic Numbers*. PhD thesis, Michigan State University, Michigan.

Sasaki, D., Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., Mazzuoccolo, G., and Preissman, M. (2014). The hunting of a snark with total chromatic number 5. *Discrete Appl. Math.*, 164:470–481.

Tait, P. G. (1878-1880). Remarks on the colouring of maps. In *Proceedings of the RSE*, pages 501–503, 729, Edinburgh, Scotland.

Vizing, V. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, pages 25–30.

Wang, W. (2002). Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3. *Graphs Comb*, 18:677–685.