Novos resultados sobre coloração de arestas em grafos split: grafos split minimamente 3-admissíveis

Fernanda Couto[1], **Diego Amaro Ferraz**[2], **Sulamita Klein**[2]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) – Nova Iguaçu, RJ – Brasil

[2]Programa de Engenharia e Sistemas de Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

fernandavdc@ufrrj.br, {ferrazda,sula}@cos.ufrj.br

Resumo. *A classificação dos grafos split quanto à coloração de arestas é um problema em aberto há décadas. Recentemente, utilizamos a partição em subclasses provida pelo* PROBLEMA DA t-ADMISSIBILIDADE *para grafos split e classificamos grafos split com $\sigma(G) = 2$, restando, portanto, classificar os grafos com $\sigma = 3$. Neste trabalho, damos um novo passo em direção a esta classificação considerando grafos split com $\sigma = 3$ obtidos a partir da adição de um vértice de grau 2 a um grafo split com $\sigma(G) = 2$, grafos esses que chamamos de grafos split minimamente 3-admissíveis. Além disso, apresentamos um algoritmo eficiente para a coloração dos grafos que são Classe 1.*

Abstract. *The classification of split graphs according to edge coloring has been an open problem for decades. Recently, we used the partition into subclasses provided by the t-*ADMISSIBILITY PROBLEM *for split graphs and classified split graphs with $\sigma(G) = 2$, remaining, therefore, to classify the graphs with $\sigma(G) = 3$. In this work, we take a new step towards this classification considering split graphs with $\sigma(G) = 3$ obtained from the addition of one vertex of degree 2 to a split graph with $\sigma(G) = 2$, which we call minimally 3-admissible split graphs. Furthermore, we present an efficient algorithm to color graphs which are Class 1.*

1. Introdução

Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores ou rótulos ao conjunto de arestas de um grafo $G = (V, E)$. Esta coloração é dita própria se arestas vizinhas (incidentes no mesmo vértice) recebem cores distintas. Dizemos que um grafo é k-aresta-colorível se é possível colorir seu conjunto de arestas, propriamente, utilizando k cores distintas. O menor número de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo é chamado de índice cromático e é denotado por $\chi'(G)$. O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS consiste em determinar o índice cromático de um grafo. É direto verificarmos que um limitante inferior para o índice cromático de um grafo é o valor de seu grau máximo $\Delta(G)$. Em 1964, Vizing demonstrou que um limitante superior para o índice cromático de um grafo G é o valor $\Delta(G) + 1$ [Vizing 1964]. Desta forma, foi possível particionar todo o universo dos grafos em duas classes: grafos que admitem uma coloração de arestas própria com $\Delta(G)$ cores, estes sendo chamados Classe 1, e grafos tais que $\Delta(G)$ cores não são suficientes para colorir seus conjuntos de arestas, necessitando então de $\Delta(G) + 1$ cores, estes sendo chamados de Classe 2. A partir deste resultado, o PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO foi introduzido na literatura. Neste desejamos responder a seguinte pergunta: dado um grafo G, este grafo é Classe 1?

O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS é extremamente desafiador e provado NP-completo no caso geral [Holyer 1981]. Para algumas classes de grafos como: grafos bipartidos [Garey e Johnson 1979] e grafos exoplanares [Johnson 1987]. Entretanto, existem classes para as quais este problema está em aberto, como é o caso da classe dos grafos split. Um grafo $G = ((X, Y), E)$ é dito split se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique X e um conjunto independente Y. Existem alguns resultados parciais a respeito da coloração de arestas dos grafos split na literatura. Chen et al. [Chen et al. 1995] mostraram que todo grafo split com grau máximo ímpar é Classe 1, e Almeida [Almeida 2012] também exibe uma condição suficiente para grafos split serem Classe 1. Além disso, alguns resultados para classes de interseção envolvendo grafos split também são conhecidos [Ortiz et al. 1998, Gonzaga 2021]. Mas a pergunta que surge é: o que falta para resolvermos completamente o problema da coloração de arestas nesta classe de grafos? Neste trabalho, apresentamos uma abordagem diferente para este estudo utilizando um segundo problema: O PROBLEMA DA t-ADMISSIBILIDADE. Este problema tem como objetivo: dado um grafo conexo G, obter uma árvore geradora T de G na qual a maior distância entre vértices adjacentes em G é menor ou igual a t em T. Neste caso, dizemos que árvore T é uma árvore *t-geradora* e se G admite tal árvore, G é dito t-admissível, onde t é o fator de extensão associado à árvore. O menor dentre todos os fatores de extensão de um grafo G é chamado de *índice de extensão* e é denotado por $\sigma(G)$. O PROBLEMA DA t-ADMISSIBILIDADE foi introduzido por Cai e Corneil em 1995 em seu trabalho intitulado Tree Spanners [Cai e Corneil 1995]. Neste trabalho, os autores demonstram que, para valores de $t \leq 2$, O PROBLEMA DA t-ADMISSIBILIDADE tem solução em tempo polinomial, enquanto que para $t \geq 4$, o problema é NP-completo. Resta então sabermos verificar a 3-admissibilidade de um grafo, mas este é um problema que está em aberto. Todavia, conhecemos algumas classes de grafos que são 3-admissíveis, como é o caso da classe dos grafos split. Mais ainda, utilizando o critério da t-admissibilidade, conseguimos particionar a classe dos grafos split em três subclasses: grafos split com $\sigma(G) = 1,\ 2$ ou 3. Neste trabalho realizamos a coloração das arestas de uma subclasse dos grafos split cujo $\sigma(G) = 3$, os grafos split minimamente 3-admissíveis.

2. Preliminares

Considerando as três subclasses mencionadas na Seção 1, temos o seguinte estado da arte para O PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO: grafos split com $\sigma(G) = 1$ são Classe 1, pois são árvores [Cai e Corneil 1995]. Recentemente, classificamos a classe dos split com $\sigma(G) = 2$ [Couto et al. 2023] usando como ferramentas os resultados apresentados no Teorema 2.1 e na Proposição 2.1.

Teorema 2.1 ([Couto e Cunha 2020]). *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split tal que $\forall y \in Y, d(y) > 1$. Então $\sigma(G) = 2$ se, e somente se, G tem um vértice universal.*

Proposição 2.1 ([Couto et al. 2023]). *Se $G = (V, E)$ é um grafo simples e $P = \{ v \in V \mid d(v) = 1\}$, então, $\sigma(G) = \sigma(G[V \setminus P])$.*

De acordo com a Proposição 2.1, a remoção de vértices de grau 1, os quais chamaremos de *pendentes*, de um grafo, em particular de um grafo split, não altera seu índice de extensão. Esta remoção de vértices pendentes é denominada pré-processamento. Outras definições importantes para este trabalho são as definições de grafo sobrecarregado, subgrafo-sobrecarregado e vizinhança-sobrecarregado. Um grafo G é dito *sobrecarregado* se $|E| > \Delta(G).\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Mais ainda, um grafo G é dito *subgrafo-sobrecarregado* se se existe um subgrafo $H \subseteq G$ tal que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado. Além disso, se H é induzido por um vértice v tal que $d(v) = \Delta(G)$ e por todos os seus vizinhos, então G é dito *vizinhança-sobrecarregado*.

Teorema 2.2 ([Couto et al. 2023]). *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$. G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Para colorir os grafos split com $\sigma(G) = 2$ que são Classe 1, apresentamos um algoritmo eficiente [Couto et al. 2023] que estende a coloração das arestas do grafo pré-processado para o grafo inteiro. A coloração do grafo pré-processado, que possui vértice universal [Couto e Cunha 2020], é feita utilizando os resultados de [Plantholt 1981, Behzad et al. 1967], apresentados a seguir.

Teorema 2.3 ([Plantholt 1981]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $|V|$ é ímpar e G tem um vértice universal, então G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.*

Teorema 2.4 ([Behzad et al. 1967]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $|V|$ é par e G tem um vértice universal, então G é Classe 1.*

Para finalizar o problema da classificação em grafos split, resta, portanto, o estudo dos grafos split com $\sigma(G) = 3$. Segue do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1 que estes grafos são caracterizados de acordo com o Corolário 2.1.

Corolário 2.1. *Seja G um grafo split e P seu conjunto de pendentes. Então $\sigma(G) = 3$ se, e somente se, $V[G \setminus P]$ não possui vértice universal.*

Chamamos de grafo split *minimamente 3-admissível* um grafo split com $\sigma(G) = 3$ obtido a partir de um grafo split com $\sigma(G) = 2$ pela adição de um único vértice de grau 2. Decorre do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1 o seguinte resultado sobre o reconhecimento destes grafos.

Corolário 2.2. *Um grafo split $G = ((X, Y), E)$ é minimamente 3-admissível se, e somente se, existe um vértice $x \in X$ adjacente a todos os vértices $v \in Y$ a menos de pendentes e exatamente um vértice de grau 2.*

3. Classificando grafos split minimamente 3-admissíveis

Teorema 3.1. *Seja G' um grafo split minimamente 3-admissível obtido pela adição do vértice v ao grafo split G com $\sigma(G) = 2$. Então G' é Classe 2 se, e somente se, G é Classe 2.*

A demonstração do Teorema 3.1 decorre do fato de que é possível estender a coloração do grafo G com $\sigma(G) = 2$ para o grafo G' minimamente 3-admissível. O algoritmo que colore os grafos que são Classe 1, utiliza o Procedimento 1, que analisa conflito de cores em $E(G') \setminus E(G)$. Uma cor é dita uma *cor faltante* em um vértice v se é utilizada na coloração das arestas de um grafo G, mas não está presente nas arestas incidentes a v. Note que, para colorir G, são usados as técnicas de Plantholt ou de Behzad, de acordo com a paridade de $\Delta(G)$.

Observação 3.1. *Se G' é um grafo split pré-processado minimamente 3-admissível obtido a partir do grafo split G com $\sigma(G) = 2$, então, $\Delta(G') = \Delta(G)$. Caso contrário, $\sigma(G') = 2$.*

Quando $\Delta(G')$ é ímpar, G é colorido pela técnica de Behzad e G e G' são Classe 1 [Behzad et al. 1967]. Entretanto, quando $\Delta(G')$ é par, utilizamos a técnica de Plantholt e temos que analisar alguns casos. Plantholt mostra que é possível particionar o conjunto dos vértices do grafo em duas partes L e R, onde R é uma clique de tamanho $\frac{\Delta(G)}{2}$ e L induz um subgrafo não sobrecarregado. Um destaque importante acerca do resultado de Plantholt, é que as arestas de $G[L]$ e $G[R]$ são coloridas com o mesmo conjunto de cores, e $G[R]$ usa uma cor a menos quando $|R|$ é par. As arestas entre as partes são coloridas com outras $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores. Quando esta técnica é utilizada para colorir $E(G)$, analisamos três casos para colorir $E(G')$: quando os vizinhos de v estão ambos em R, ambos em L, ou um em R e outro em L. Note que, quando $|R|$ é ímpar, o caso em que ambas as arestas são incidentes na parte R é imediato, pois utilizamos as cores faltantes de cada vértice, que são, por sua vez, distintas [Behzad et al. 1967].

O Procedimento 1 fornece uma coloração aos grafos minimamente 3-admissíveis que são Classe 1. Este procedimento recebe como entrada G' obtido a partir de G pela adição do vértice v e das arestas av e bv. Consideremos que j é a cor faltante em $G[R]$ quando $|R|$ é par e que a cor faltante nos vértices a e b é sempre a mesma. E finalmente, uma aresta denotada por rl é uma aresta com um extremo na parte R e outro na parte L.

Procedimento 1 Procedimento de análise de conflito de cores faltantes

Se $\Delta(G)$ é par, então
  Se $|R|$ é par, então
    Se a ou $b \in R$ então (S.P.G. $b \in R$)
      $av[cor] \leftarrow j$; $bv[cor] \leftarrow bd[cor],\ d \in R$; $bd[cor] \leftarrow j$
    Senão, seja i a cor faltante comum a a e b
      Se $i \neq j$, então
        Trocar cada cor i em $E(G[R])$ pela cor j
      $av[cor] \leftarrow i$; $bv[cor] \leftarrow bl[cor]$; $bl[cor] \leftarrow i$
  Se $|R|$ é ímpar e i a cor faltante comum a a e b, então
    Se $a \in L$ e $b \in R$
      Trocar cada cor i em $E(G[R])$ por cor k e vice-versa, $k \neq i$
        $av[cor] \leftarrow i; bv[cor] \leftarrow k$
    Se a e $b \in L$
      Se existe $r \in R \cap N(b)$ tal que i seja cor faltante de r, então
        $av[cor] \leftarrow i$; $bv[cor] \leftarrow br[cor]$; $br[cor] \leftarrow i$
      Senão
        Trocar cada cor i em $E(G[R])$ por cor k e vice-versa, $k \neq i$
        $av[cor] \leftarrow i$; $bv[cor] \leftarrow br[cor]$; $br[cor] \leftarrow i$

O algoritmo completo consiste então de três etapas. A primeira delas é a coloração das arestas do grafo pré-processado através das estratégias de Plantholt ou Behzad. A segunda etapa consiste na análise de conflito, se necessária, descrita pelo Procedimento 1 e por fim, na terceira etapa é realizada a coloração das arestas dos vértices pendentes exibida em [Couto et al. 2023].

Referências

Almeida, S. (2012). *Coloração de Arestas em Grafos Split*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

Behzad, M., Chartrand, G., e Cooper, J. (1967). The colour numbers of complete graphs. *J. London Math. Soc.*, 42.

Cai, L. e Corneil, D. G. (1995). Tree spanners. *SIAM J. Discrete Math.*, 8:359–387.

Chen, B.-L., Fu, H.-L., e Ko, M.-T. (1995). Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17.

Couto, F. e Cunha, L. (2020). Hardness and efficiency on minimizing maximum distances in spanning trees. *Theoretical Computer Science*, 838.

Couto, F., Ferraz, D., e Klein, S. (2023). New results on edge-coloring and total-coloring of split graphs. *Discrete Applied Mathematics: Notes*. Submetido.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*. W. H. Freeman, first edition edition.

Gonzaga, L. (2021). Coloração de arestas em grafos split-comparabilidade e split-intervalos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

Holyer, I. (1981). The np-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720.

Johnson, D. S. (1987). The np-completeness column: An ongoing guide. *Journal of Algorithms*, 8(3):438–448.

Ortiz, C., Maculan, N., e Szwarcfiter, J. L. (1998). Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 82(1):209–217.

Plantholt, M. (1981). The chromatic index of graphs with a spanning star. *J. Graph Theory*, 5:45–53.

Vizing, V. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in russian). *(Russian) Diskret Analiz*, 3.