

Coloração de identificação local em produto Cartesiano

Robson M. Oliveira¹ Márcia R. Cappelle¹ Hebert Coelho¹

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brasil

robsonmedradooli@gmail.com, mcappelle@ufg.br, hebert@ufg.br

Abstract. A locally identifying coloring (or lid-coloring for short) in a graph is a proper coloring such that, for any edge uv , if u and v have distinct closed neighborhoods, then the set of colors used on vertices of the closed neighborhoods of u and v are distinct. The lid-chromatic number of a graph G , denoted by $\chi_{lid}(G)$, is the minimum number of colors needed in any lid-coloring of G . In this work, we determine the lid-chromatic number for the Cartesian product $K_m \square P_n$ and give lower and upper bounds for the lid-chromatic number of $K_m \square C_n$ and $K_m \square K_n$.

Resumo. Uma coloração de identificação local (lid-coloração) em um grafo é uma coloração própria tal que para qualquer aresta uv , se u e v têm vizinhanças fechadas distintas, então o conjunto de cores utilizadas sobre os vértices das vizinhanças fechadas de u e v são distintos. O número lid-cromático do grafo G , denotado por $\chi_{lid}(G)$, é o menor número de cores necessárias em qualquer lid-coloração de G . Neste trabalho, determinamos o número lid-cromático para o produto Cartesiano $K_m \square P_n$ e limites inferiores e superiores para o lid-cromático de $K_m \square C_n$ e $K_m \square K_n$.

1. Introdução

Consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo G , seus conjuntos de vértices e arestas são denotados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Uma aresta $\{u, v\}$ é denotada por uv . A vizinhança aberta de um vértice $v \in V(G)$ é $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$, e sua vizinhança fechada é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Seja $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $N[S]$ o conjunto $\bigcup_{u \in S} N[u]$. Uma clique em um grafo G é um conjunto de vértices que são adjacentes dois a dois em G . Denotamos por K_n , C_n e P_n , o grafo completo, o grafo ciclo e o grafo caminho, respectivamente, com n vértices. Denotamos o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ por $[n]$.

O problema de coloração de vértices consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Essa coloração é chamada de coloração própria. O número mínimo de cores necessárias para colorir um grafo G é seu número cromático, denotado por $\chi(G)$. A função $c : V \rightarrow \mathbb{N}^*$ é uma coloração de vértices de G . Para qualquer $S \subseteq V$, definimos $c(S)$ como o conjunto de cores atribuídas aos vértices em S .

Uma coloração de vértices c de um grafo G é chamada de coloração de identificação local (lid-coloração) se satisfaz as seguintes condições: *i*) c é uma coloração própria de G , ou seja, não há dois vértices adjacentes com a mesma cor, e *ii*) se para cada par de vértices adjacentes u, v com $N[u] \neq N[v]$, então tem-se $c(N[u]) \neq c(N[v])$.

O número cromático de identificação local do grafo G , denotado por $\chi_{lid}(G)$, é o menor número de cores necessárias em qualquer coloração de identificação local de G . Na Figura 1(a) temos um grafo G e sua lid-coloração mínima. Observe que a coloração é própria satisfazendo a condição (i) e os conjuntos de cores $c(N[v_1]) = \{1, 2, 3\}$, $c(N[v_2]) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $c(N[v_3]) = \{2, 4\}$, $c(N[v_4]) = \{1, 2, 3, 5\}$, $c(N[v_5]) = \{2, 3, 5\}$ e $c(N[v_6]) = \{2, 5\}$ satisfazem a condição (ii).

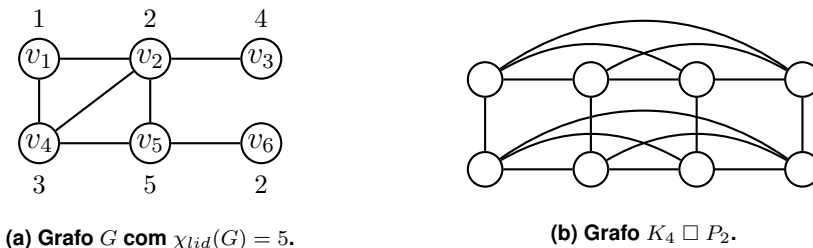


Figura 1. Exemplos.

A lid-coloração foi introduzida em 2010 [Esperet et al. 2010]. Foram propostos vários limites para $\chi_{lid}(G)$ para diferentes famílias de grafos, incluindo grafos planares, algumas subclasses de grafos perfeitos e grafos com grau máximo limitado. Foi demonstrado que todo grafo bipartido G tem $\chi_{lid}(G) \leq 4$. Além disso, foi provado que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo, enquanto é possível decidir em tempo linear se uma árvore é 3-lid-colorível.

[Gonçalves et al. 2013] provaram que para qualquer grafo planar G , tem-se $\chi_{lid}(G) \leq 1280$. Eles também provaram que para qualquer classe de grafos com expansão limitada, o número lid-cromático é limitado, o que leva a um limite superior explícito para o número lid-cromático de grafos planares, respondendo uma pergunta feita em [Esperet et al. 2010] que era saber se $\chi_{lid}(G)$ é limitado para a classe de grafos planares. [Martins and Sampaio 2018] obtiveram algoritmos de tempo linear para calcular o número lid-cromático em algumas classes de grafos com poucos P_4 's, como cografos, grafos P_4 -esparsos e $(q, q - 4)$ -grafos.

Recentemente, [Bhyravarapu et al. 2023] caracterizaram os grafos cujo número lid-cromático é igual ao número de vértices do grafo. Além disso, eles demonstraram que o número lid-cromático de um grafo bipartido biconvexo pode ser calculado em tempo polinomial. Por fim, eles determinaram o número lid-cromático dos produtos Cartesiano e lexicográfico de caminhos e ciclos.

Sejam G e H grafos com $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. O produto Cartesiano de G e H , denotado por $G \square H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G \times H)$, e dois vértices (u_i, v_j) e (u_h, v_k) de $G \square H$ são adjacentes se $(v_j, v_k) \in E(H)$ e $i = h$, ou $(u_i, u_h) \in E(G)$ e $j = k$. Um exemplo de produto Cartesiano é exibido na Figura 1(b).

[Esperet et al. 2010] provaram que se G e H são grafos bipartidos sem vértices isolados, então $G \square H$ é 3-lid-colorível. Logo, investigamos o produto Cartesiano de grafos em que pelo menos um de G e H é um grafo completo, ou seja, pelo menos um dos fatores não é um grafo bipartido. Neste trabalho, determinamos o número lid-cromático para o produto Cartesiano $K_m \square P_n$ e limites inferiores e superiores para o lid-cromático de $K_m \square C_n$ e $K_m \square K_n$.

2. Lid-coloração em produto Cartesiano

A Proposição 1 apresenta um limite inferior para $\chi_{lid}(G)$ quando G possui uma clique K de tamanho k .

Proposição 1 [Oliveira et al.] *Seja G um grafo livre de gêmeos contendo uma clique K de ordem $k \geq 2$. Então $\chi_{lid}(G) \geq k + \log_2 k$.*

No Lema 2, mostramos um limite inferior maior do que o apresentado na Proposição 1, considerando grafos com uma clique K com restrições em sua vizinhança.

Lema 2 *Seja G um grafo que contém uma clique K de ordem k . Se, para todo $v \in K$, v é adjacente a apenas um vértice u que não está em K e u não é adjacente a outro vértice de K , então $\chi_{lid}(G) \geq 2k - 1$.*

Prova. Seja $|K| = k$ em que os vértices de K são denotados por v_i , com $1 \leq i \leq k$. Pela hipótese, todo vértice v_i em K possui um vizinho u_i , com $1 \leq i \leq k$ que não está em K e que não é adjacente a nenhum outro vértice de K . Seja $S = \cup_{i=1}^k \{u_i\}$. Considere uma coloração c de G em que para $1 \leq i \leq k$, $c(v_i) = i$. Vamos mostrar que para colorir os vértices de S precisamos de $k - 1$ cores diferentes das cores em $[k]$. Suponha que pelo menos dois vértices de S sejam coloridos com duas cores em $[k]$. Sem perda de generalidade, sejam $c(u_1) = 2$ e $c(u_2) = 1$, o que implica em $c(N[v_1]) = c(N[v_2]) = [k]$, o que é uma contradição. Portanto, $\chi_{lid}(G) \geq 2k - 1$. \square

Nas Figuras 2-4, a coloração do grafo $K_m \square G$ será representada por uma matriz, onde cada linha corresponde à coloração dos vértices de uma cópia de K_m e cada coluna corresponde à coloração de uma cópia de G . Apresentamos no próximo resultado, o número lid-cromático para o produto Cartesiano $K_m \square P_n$.

Teorema 3 *Para $n \geq 2$, $m \geq 3$, temos $\chi_{lid}(K_m \square P_n) = 2m - 1$.*

Prova. Uma lid-coloração de $K_m \square P_n$ com cardinalidade $2m - 1$ é apresentada na Figura 2. Portanto, $\chi_{lid}(K_m \square P_n) \leq 2m - 1$. Pelo Lema 2, $\chi_{lid}(K_m \square P_n) \geq 2m - 1$. Portanto, $\chi_{lid}(K_m \square P_n) = 2m - 1$. \square

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m & m+1 & m+2 & \cdots & 2m-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m & m+1 & m+2 & \cdots & 2m-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Figura 2. Uma lid-coloração de $K_m \square P_n$.

A seguir, apresentamos limites para o número lid-cromático dos produtos cartesianos de $K_m \square C_n$ e $K_m \square K_n$.

Teorema 4 *Para $n, m \geq 4$, temos $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil \leq \chi_{lid}(K_m \square C_n) \leq 2m - 1$.*

Prova. Uma lid-coloração de $K_m \square C_n$ é dada na Figura 3(a) para n par e outra em 3(b) para n ímpar, ambas de cardinalidade $2m - 1$. Portanto, $\chi_{lid}(K_m \square C_n) \leq 2m - 1$.

Para o limite inferior, vamos supor que existe uma coloração c de $K_m \square C_n$ com menos do que $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil$ cores. Seja H uma clique de $K_m \square C_n$ com $V(H) = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que $c(v_i) = i$ para todo $i \in [m]$. Logo, restam no máximo $\lceil \frac{2m-2}{3} \rceil - 1$ cores para serem utilizadas nos vizinhos de H . Afirmamos que com um conjunto X contendo no máximo $\lceil \frac{2m-2}{3} \rceil - 1$ cores obtemos no máximo $m - 1$ subconjuntos distintos destas cores (incluindo o conjunto vazio), cada um com no máximo dois elementos de X , sendo que cada elemento de X está contido em no máximo dois subconjuntos (já que os vizinhos de H formam duas cliques disjuntas em $K_m \square C_n$). Isto implica em haver dois vértices de H , digamos v_i e v_j , tais que $c(N[v_i]) = c(N[v_j]) = [m]$, o que contradiz que c é uma lid-coloração de $K_m \square C_n$. \square

O limite inferior do Teorema 4 é justo. Uma coloração com $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil = 6$ cores é apresentada na Figura 3(c) para $K_4 \square C_4$.

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \end{array} \right) \\
 \text{(a) } c(C_n \square K_m), \text{ com } n \\
 \text{par.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & m+1 \end{array} \right) \\
 \text{(b) } c(K_m \square C_n), \text{ com } n \\
 \text{ímpar.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right) \\
 \text{(c) } c(K_4 \square C_4).
 \end{array}$$

Figura 3. Lid-colorações de $K_m \square C_n$, quando n é par (a) quando n é ímpar (b). Em (c) uma lid-coloração para $K_4 \square C_4$ com $\lceil \frac{5m-2}{3} \rceil = 6$ cores.

Teorema 5 Para $m \geq n \geq 2$, temos $m + \log_2 m \leq \chi_{lid}(K_m \square K_n) \leq 2m - 1$.

Prova. Uma lid-coloração com $2m - 1$ cores de $(K_m \square K_n)$ é apresentada na Figura 4(a). Portanto, $\chi_{lid}(K_m \square K_n) \leq 2m - 1$. O grafo $K_m \square K_n$ tem uma clique de tamanho m . Pela Proposição 1, $\chi_{lid}(K_m \square K_n) \geq m + \log_2 m$. \square

Para mostrar que o limite inferior do Teorema 5 é justo apresentamos uma lid-coloração para $K_4 \square K_4$ com $m + \log_2 m = 6$ cores na Figura 4(b).

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & m+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \cdots & 2m-2 \\ n & m+1 & m+2 & \cdots & 2m-1 \end{array} \right) \\
 \text{(a) } c(K_m \square K_n), \text{ com } m \geq n.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right) \\
 \text{(b) } c(K_4 \square K_4).
 \end{array}$$

Figura 4. Em (a) uma lid-coloração de $K_m \square K_n$ com $2m - 1$ cores. Em (b) uma lid-coloração para $K_4 \square K_4$ com $m + \log_2 m = 6$ cores.

Vale ressaltar que a lid-coloração não é hereditária. Por exemplo, $\chi_{lid}(K_4 \square P_2) = 7$ enquanto $\chi_{lid}(K_4 \square K_4) = 6$. Note-se que $K_4 \square P_2$ é subgrafo induzido de $K_4 \square K_4$.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido por meio de bolsa de estudos.

Referências

- Bhyravarapu, S., Kumari, S., and Reddy, I. (2023). On locally identifying coloring of graphs. In *Algorithms and Discrete Applied Mathematics: 9th International Conference, CALDAM 2023, Gandhinagar, India, February 9–11, 2023, Proceedings*, pages 147–158. Springer.
- Esperet, L., Gravier, S., Montassier, M., Ochem, P., and Parreau, A. (2010). Locally identifying coloring of graphs. *arXiv preprint arXiv:1010.5624*.
- Gonçalves, D., Parreau, A., and Pinlou, A. (2013). Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18):2946–2951.
- Martins, N. and Sampaio, R. (2018). Locally identifying coloring of graphs with few p4s. *Theoretical Computer Science*, 707:69–76.
- Oliveira, M., Cappelle, R. M., and Coelho, H. Locally identifying coloring in some chordal graphs. *Submetido*.