Coloração caminho não repetitivo de ladders circulares [*]

Fábio Botler[1], Wanderson Lomenha[1], João Pedro de Souza[1,2]

[1]Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

[2]Departamento de Matemática
Colégio Pedro II

{fbotler, wlomenha, jpsouza}@cos.ufrj.br

Abstract. *Fix a coloring $c\colon V(G) \to \mathbb{N}$ of the vertices of a graph G and let $W = v_1 \cdots v_{2r}$ be a path in G. We say that W is* repetitive *(with respect to c) if $c(v_i) = c(v_{i+r})$ for every $i \in [r]$. Finally, we say that c is a* path-nonrepetitive coloring *of G if there is no repetitive path in G, and we denote by $\pi(G)$ the minimum number of colors in a path-nonrepetitive coloring of G. We study the path-nonrepetitive chromatic number of* circular ladders. *The k-circular ladder CL_k is the graph obtained from two copies $v_1 \cdots v_k v_1$ and $u_1 \cdots u_k u_1$ of the cycle of order k by adding the perfect matching $\{v_i u_i : i \in [k]\}$. In this paper, we show that if k is even and $k \geq 36$, then $\pi(CL_k) = 5$.*

Resumo. *Fixe uma coloração $c\colon V(G) \to \mathbb{N}$ dos vértices de um grafo G e seja $W = v_1 \cdots v_{2r}$ um caminho em G. Dizemos que W é* repetitivo *(com respeito a c) se $c(v_i) = c(v_{i+r})$ para todo $i \in [r]$. Finalmente, dizemos que c é uma* coloração caminho não-repetitiva *de G se não existe caminho repetitivo em G, e denotamos por $\pi(G)$ o menor número de cores em uma coloração caminho não-repetitiva de G. Nós estudamos o número cromático não repetitivo de ladders circulares. O k-ladder circular CL_k é o grafo obtido de duas cópias $v_1 \cdots v_k v_1$ e $u_1 \cdots u_k u_1$ do ciclo de ordem k pela adição do emparelhamento perfeito $\{v_i u_i : i \in [k]\}$. Neste artigo, mostramos que se k é par e $k \geq 36$, então $\pi(CL_k) = 5$.*

1. Introdução

Seja k um inteiro positivo, definimos $[k] = \{1, \ldots, k\}$. Um *caminho* em um grafo G é uma sequência de vértices $v_1 \cdots v_n$ de G tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para todo $i \in [n-1]$, e $v_i \neq v_j$, para todo $i \neq j$. Um *ciclo* em um grafo G é uma sequência de vértices de $v_1 \cdots v_n v_1$ de G tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $i \in [n-1]$, $v_n v_1 \in E(G)$ e $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Denotamos por P_n (resp. C_n) o caminho (resp. ciclo) com n vértices. Dada uma coloração $c\colon V(G) \to [k]$, dizemos que um caminho $P = v_1 \cdots v_{2r}$ é *repetitivo* se $c(v_i) = c(v_{i+r})$ para todo $i \in [r]$, e dizemos que c é uma coloração *caminho não repetitiva* se nenhum caminho de G é repetitivo (com respeito a c). O *número cromático*

[*]This research has been partially supported by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil – CAPES – Finance Code 001. F. Botler is supported by CNPq (423395/2018-1 and 304315/2022-2), FAPERJ (211.305/2019 and 201.334/2022) and CAPES-PRINT (88887.695773/2022-00) and UFRJ (23733). W. Lomenha is partially supported by CNPq (140654/2021-6). FAPERJ is the Rio de Janeiro Research Foundation. CNPq is the National Council for Scientific and Technological Development of Brazil.

caminho não repetitivo de G, denotado por $\pi(G)$, é o menor inteiro k tal que G admite uma coloração não repetitiva $c\colon V(G) \to [k]$. Note que toda coloração caminho não repetitiva c de G é uma coloração própria, pois se $vu \in E(G)$, então vu não é um caminho não repetitivo e, portanto, $c(v) \neq c(u)$.

Em 1906, Thue provou que existem sequências não repetitivas arbitrariamente longas com três símbolos [Thue 1906], i.e., sequências $a_1 \cdots a_n$ tais que $a_i \in \{1, 2, 3\}$ para todo i; e para todos $j, t \in [n]$, com $j + 2t \leq n$, temos $a_{j+1}a_{j+2} \cdots a_{j+t} \neq a_{j+1+t}a_{j+2+t} \cdots a_{j+2t}$. Isso implica que, $\pi(P_n) = 3$, para todo n. Apesar disso, o conceito de coloração caminho não repetitiva foi introduzido apenas em 2002 por Alon, Grytczuk, Hałuszczak, e Riordan [Alon et al. 2002] que provaram que para todo grafo G que $\pi(G) \leq C\Delta(G)^2$, em que $\Delta(G)$ denota o grau máximo de G e $C = 2e^{16} + 1$. Colorações não repetitivas um pouco mais gerais receberam atenção recentemente devido a um trabalho de Rosenfeld [Rosenfeld 2020]. Para classes mais restritas de grafos, Wood provou que se G é um grafo cúbico, então $\pi(G) \leq 19$ [Wood 2021], e Currie [Currie 2002] provou o seguinte resultado para ciclos.

Teorema 1 (Currie, 2002)**.** *Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Então*

$$\pi(C_n) = \begin{cases} 4, & \textit{se } n \in \{5, 7, 9, 10, 14, 17\} \\ 3, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Dado um inteiro positivo k, o grafo *ladder circular* de ordem k ou k*-ladder circular*, denotado por CL_k, é o produto cartesiano de C_k e K_2. Em outras palavras, CL_k é o grafo cúbico obtido da união disjunta de duas cópias de C_k, digamos $v_1 \cdots v_k v_1$ e $u_1 \cdots u_k u_1$ adicionando o emparelhamento perfeito $\{v_i u_i \colon i \in [k]\}$. Neste artigo provamos que $\pi(CL_k) = 5$ sempre que k é par e $k \geq 36$. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2. *Se $k \geq 8$ é um inteiro par tal que $\pi(C_{k/2}) = 3$, então $\pi(CL_k) = 5$.*

A prova do Teorema 2, está dividida em três proposições (Proposição 3–5) que são apresentadas na Seção 2. Na Seção 3 discutimos trabalhos futuros. Devido a limitações de espaço, omitimos a prova da Proposição 4.

2. Prova do Teorema 2

Nesta seção, provamos o Teorema 2. Primeiramente, mostramos o limitante inferior (Proposições 3 e 4), que vale para todo $k \geq 7$.

Proposição 3. *Se $k \geq 3$ então $\pi(CL_k) \geq 4$.*

Demonstração. Seja k como no enunciado, $G = CL_k$ e seja $u_1 \cdots u_k u_1$ e $v_1 \cdots v_k v_1$ como acima. Lembre-se que $u_1 \cdots u_k u_1$ e $v_1 \cdots v_k v_1$ formam ciclos disjuntos. Suponha por contradição que G possui uma coloração caminho não repetitiva c com três cores. Tome $n \in [k]$ e suponha que $c(v_n) = 1$. Note que como temos apenas três cores, pelo menos dois vizinhos de v_n possuem a mesma cor. Por simetria, supomos que $c(v_{n-1}) = 2$ e $2 \in \{c(u_n), c(v_{n+1})\}$. Primeiramente, suponha que $c(u_n) = 2$. Seja $u \in \{u_{n-1}, u_{n+1}\}$. Como c é própria, temos $c(u) \neq 2$. Se $c(u) = 1$, então $v_{n-1}v_n u_n u$ é repetitivo pois induz a sequêcia 2121. Então podemos supor que $c(u_{n-1}) = c(u_{n+1}) = 3$, mas então $v_{n-1}u_{n-1}u_nu_{n+1}$ é repetitivo, pois induz a sequência 2323. Logo, temos $c(u_n) \neq 2$, i.e., $c(u_n) = 3$, e que $c(v_{n+1}) = 2$. Como c é própria, temos que $c(u_{n-1}) = 1$, mas então $u_{n-1}v_{n-1}v_nv_{n+1}$ é repetitivo pois induz a sequência 1212. $\square$

De forma semelhante, porém com uma análise de casos mais detalhada e, portanto, mais longa, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 4. *Se $k \geq 7$ então $\pi(CL_k) \geq 5$.*

No que segue, provamos o limitante superior.

Proposição 5. *Se $k \geq 8$ é um inteiro par tal que $\pi(C_{k/2}) = 3$, então $\pi(CL_k) \leq 5$.*

Demonstração. Seja k como no enunciado. Pela natureza cíclica deste problema, quando necessário, as operações nos subíndices são tomadas módulo k ou módulo $k/2$. Seja $C_{k/2} = w_1w_2 \cdots w_{\frac{k}{2}}w_1$. Como $\pi(C_{k/2}) = 3$, podemos fixar uma coloração caminho não-repetitiva $f\colon V(C_{k/2}) \to \{0, 1, 2\}$. Agora, lembre-se que CL_k é composto de dois ciclos disjuntos $O = v_1 \cdots v_kv_1$ e $I = u_1 \cdots u_ku_1$. Então definimos uma coloração c de CL_k da seguinte forma.

$$c(v_i) = \begin{cases} f(w_{i/2}) & \text{se } i \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad \text{e} \quad c(u_i) = \begin{cases} f(w_{i/2}) + 1 \pmod 3 & \text{se } i \text{ é par,} \\ 4 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Não é difícil ver que pela construção de c, se $P = x_1 \cdots x_{2t}$ é um caminho inteiramente contido em O ou inteiramente contido em I, então P define um caminho P' em $C_{k/2}$ de tal forma que P é repetitivo com respeito a c se e somente P' é repetitivo com respeito a f. Como f é uma coloração não-repetitiva, então P não é repetitivo. No que segue, analisamos caminhos que possuem vértices tanto em O quanto em I.

Seja $P = x_1 \cdots x_{2t}$ um caminho repetitivo em CL_k com o menor comprimento possível. Observe que se para algum $l \leq t - 3$ e $i \in [k]$ temos que $x_lx_{l+1}x_{l+2}x_{l+3} = v_iv_{i+1}u_{i+1}u_i$, ou seja, se em algum momento $P_1 = x_1 \cdots x_t$ está em O e passa para I e segue na “direção contrária”, então a sequência de cores $c(v_i)c(v_{i+1})c(u_{i+i})c(u_i) \in \{0341, 1342, 2340, 3014, 3124, 3204\}$. Em particular, a recíproca é verdadeira: se $c(x_l)c(x_{l+1})c(x_{l+2})c(x_{l+3}) \in \{0341, 1342, 2340, 3014, 3124, 3204\}$, então $v_iv_{i+1}u_{i+1}u_i$ ocorre em P_1 para algum $i \in [k]$. Isso também implica que $x_{l+t}x_{l+t+1}x_{l+t+2}x_{l+t+3} = v_jv_{j+1}u_{j+1}u_j$ para algum $j \in [k]$, mas então $x_1 \cdots x_lx_{l+3} \cdots x_{l+t}x_{l+t+3} \cdots x_{2t}$ é um caminho repetitivo com $2t - 4$ vértices, uma contradição à minimalidade de P. Então $v_iv_{i+1}u_{i+1}u_i$ não pode ocorrer em P_1 para nenhum $i \in [k]$. Analogamente, verificamos que as sequências de vértices do tipo $v_{i+1}v_iu_iu_{i+1}$, $u_iu_{i+1}v_{i+1}v_i$ e $u_{i+1}u_iv_iv_{i+1}$ não podem ocorrer em P_1 para nenhum $i \in [k]$.

Assim, podemos concluir que $P_1 = Q_1 \cdots Q_s$ em que Q_i é um caminho (com pelo menos dois vértices, com exceção de Q_1 e Q_s, que podem ter apenas um vértice) inteiramente contido em O ou inteiramente contido em I, e os índices dos vértices de O ou I ocorrem para todo $i \in [s]$ sempre de forma crescente, ou sempre de forma decrescente. Em outras palavras, P_1 é um caminho que segue sempre na direção horária ou sempre na direção anti-horária. Além disso, $P_2 = x_{t+1} \cdots x_{2t} = Q_{s+1} \cdots Q_{2s}$ segue a mesma direção de P_1, e Q_{i+s} está inteiramente contido em O se e somente se Q_i está inteiramente contido em O. Então, no que segue, assumimos, sem perda de generalidade, que P e, consequentemente, P_1 e P_2 percorrem CL_k na direção horária.

Consideremos a projeção $p\colon V(CL_k) \to V(O)$ dada por $p(v_i) = p(u_i) = v_i$ para todo $i \in [k]$, que estendemos aos caminhos em CL_k de forma natural, i.e., $p(x_1x_2\cdots x_t) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_t)$. Como P percorre CL_k na direção horária, $p(P)$ é um caminho *levemente preguiçoso*, i.e., uma sequência de vértices na qual um vértice pode ocorrer no máximo duas vezes, e no caso em que ocorre duas vezes, tais ocorrências são consecutivas, e dois vértices consecutivos distintos devem ser adjacentes. Observe que cada ocorrência dupla de um vértice em $p(P)$ ocorre precisamente quando P passa de vértices em O para vértices em I ou de vértices em I para vértices em O; e que ocorrências duplas em P_1 ocorrem na mesma posição que ocorrências duplas em P_2.

Agora note que se Q_i está inteiramente contido em O, então a sequência de cores de $p(Q_i)$ é precisamente a sequência de cores de Q_i; e se Q_i está inteiramente contido em I, então a sequência de cores de $p(Q_i)$ é obtida da sequência de cores de Q_i ao substituirmos 0 por 2, 1 por 0, e 2 por 1, i.e., ao substituirmos x por $x - 1 \pmod 3$, e 4 por 3. Em particular, temos que como as sequências de cores de Q_i e de Q_{i+s} são iguais, então a sequência de cores de $p(Q_i)$ e de $p(Q_{i+s})$ são iguais, e, portanto, a sequência de cores de $p(P)$ é repetitiva. Mas então o caminho obtido de P ao substituirmos cada ocorrência dupla de um vértice por uma ocorrência simples é um caminho repetitivo em O, uma contradição. $\square$

3. Conclusão e trabalhos futuros

Neste artigo provamos que $\pi(CL_k) = 5$ para muitos valores de k. Pretendemos estender os resultados deste artigo para todo k. No caso em que k é pequeno, em especial $k \leq 35$, tal tarefa deve empregar o uso de computadores; e no caso em que k é ímpar, devemos explorar variações da coloração apresentada acima.

Este trabalho faz parte de um projeto a respeito de colorações não repetitivas de classes especiais de grafos em que estudamos variações de colorações caminho não repetitivas em caminhos, ciclos, ladders circulares, e grafos de Petersen generalizados, assim como problemas extremais envolvendo números cromáticos não repetitivos (veja [Botler et al. 2022]).

Referências

Alon, N., Grytczuk, J. a., Hał uszczak, M., and Riordan, O. (2002). Nonrepetitive colorings of graphs. volume 21, pages 336–346. Random structures and algorithms (Poznan, 2001).

Botler, F., Lomenha, W., and de Souza, J. P. (2022). On the maximum number of edges in a graph with prescribed walk-nonrepetitive chromatic number. In *Anais do VII Encontro de Teoria da Computação*, pages 41–44. SBC.

Currie, J. D. (2002). There are ternary circular square-free words of length n for $n \geq 18$. *Electron. J. Combin.*, 9(1):Note 10, 7.

Rosenfeld, M. (2020). Another approach to non-repetitive colorings of graphs of bounded degree. *Electron. J. Combin.*, 27(3):Paper No. 3.43, 16.

Thue, A. (1906). Über unendliche zeichenreihen. norske vid. *Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl*, 7(1):22.

Wood, D. R. (2021). Nonrepetitive graph colouring. *Electron. J. Combin.*, DS24(Dynamic Surveys):78.