5-coloração distância-2 em fulerenes de cintura 5 [*]

Wanderson Lomenha[1], Diego Nicodemos[2,3], João Pedro de Souza[1,2]

[1]Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

[2]Departamento de Matemática
Colégio Pedro II, Brasil

[3]Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

{wlomenha, jpsouza}@cos.ufrj.br, diegonicodemos@cp2.g12.br

Abstract. *Fullerene graphs are cubic, planar, 3-connected with girth of size 5. A coloring $c\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ is a* distance-2 coloring *if $c(u) \neq c(v)$ for all $u, v \in V(G)$ such that $dist(u,v) \leq 2$, where $dist(u,v)$ denotes the usual distance between u and v. We define $\chi_2(G)$ to be the smallest value of k for which there exists a distance-2 coloring. In this work, we prove that $\chi_2(G) = 5$ for a subclass of fullerene graphs.*

Resumo. *Grafos fulerenes são grafos cúbicos, planares, 3-conexos com cintura de tamanho 5. Uma coloração $c\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$ é uma* coloração distância-2 *se $c(u) \neq c(v)$ para todo $u, v \in V(G)$ tal que $dist(u,v) \leq 2$, onde $dist(u,v)$ denota a distância usual entre u e v. Definimos $\chi_2(G)$ como sendo o menor valor k para o qual existe uma coloração distância-2. Neste trabalho, provamos que $\chi_2(G) = 5$ para uma subclasse de grafos fulerenes.*

1. Introdução

Os grafos *fulerenes* são grafos cúbicos, planares e 3-conexos, contendo faces de tamanhos 5 e 6, chamadas de faces pentagonais e hexagonais, respectivamente. Por meio da Relação de Euler, pode-se concluir que todos os grafos fulerenes possuem exatamente 12 faces pentagonais e um número arbitrário, diferente de 1, de faces hexagonais. Os grafos *fulerenes com simetria icosaedral*, denotados por $G_{i,j}$, com $0 \leq i \leq j$ e $j \neq 0$, foram introduzidos por Andova e Škrekovski [Andova and Škrekovski 2013] em 2013.

Definição alternativa Definimos T_i como sendo a imersão de um triângulo de lado i e seus i_2 triângulos interiores em uma grade triangular. Definiremos $G_{0,j}$ com base em seu dual $G^*_{0,j}$. Teremos que $G^*_{0,1}$ é o icosaedro. Considere a subdivisão de cada triângulo em $G_{0,1}$ em i arestas. Para cada K_{3j} adicionaremos uma cópia de T_{j-2} e formaremos um T_j. Esse grafo será $G^*_{0,j}$. Observe que cada vértice de grau 5 em $G^*_{0,j}$ está a uma distância j de exatamente outros 5 vértices de grau 5. Note que há apenas um caminho entre duas faces pentagonais em $G_{0,j}$. Para mais informações sobre grafos

[*]O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil – CNPq. W. Lomenha é parcialmente financiado pelo CNPq (140654/2021-6).

fulerenes, recomendamos ao leitor [Nicodemos 2017], [Nicodemos and Stehlík 2016] e [Andova et al. 2012].

Dado um grafo G, dizemos que a coloração $c\colon V(G) \to \{1,\dots,k\}$ é uma *coloração distância-2* se $c(u) \neq c(v)$ para todo $u, v \in V(G)$ tal que $dist(u,v) \leq 2$, onde $dist(u,v)$ denota a distância usual entre u e v, ou seja, o caminho de menor comprimento que conecta u e v em G. Em outras palavras, c é uma coloração distância-2 se $c(u) \neq c(v)$ sempre que $uv \in E(G)$ ou u e v possuem um vizinho em comum. O *número cromático distância-2* de G, denotado por $\chi_2(G)$, é definido como o menor inteiro k no qual G admite uma k-coloração distância-2. Em 1977, Wegner [Wegner 1977] provou que se G é cúbico e planar, então $\chi_2(G) \leq 8$ e conjecturou que $\chi_2(G) \leq 7$ para todo G cúbico e planar; em 2016, Hartke et al. [Hartke et al. 2016] provaram a conjectura de Wegner e conjecturaram que se G é um grafo cúbico, planar e 3-conexo ou que não possui face pentagonal, então $\chi_2(G) \leq 6$; em 2021, Feder et al. [Feder et al. 2021] provaram uma versão mais fraca da conjectura de Hartke et al. que $\chi_2(G) \leq 6$ para todo grafo cúbico, planar e bipartido. Neste artigo, abordamos especificamente os grafos fulerenes com simetria icosaedral $G_{0,j}$, com $j \geq 0$. Demonstramos que $\chi_2(G_{0,2j+1}) = 5$, para todo $j \geq 0$.

2. Coloração distância-2 de fulerenes com simetria icosaedral $G_{0,2j+1}$

Dado um grafo $G_{0,j}$ com $j \geq 0$, e c uma coloração distância-2, temos $c(u) \neq c(v)$ para todo $u, v \in V(G_{0,j})$ no qual $dist(u,v) \leq 2$. Isso implica que $\chi_2(G_{0,j}) \geq 5$, pois $C_5 \subset G$. Nesta seção vamos provar que esse limitante é justo para todo $G_{0,2j+1}$ com $j \geq 0$. Para isso, apresentamos uma 5-coloração distância-2 do grafo $G_{0,1}$, o dodecaedro (veja a Figura 1). Essa coloração será utilizada para colorir recursivamente os próximos membros da família $G_{0,2j+1}$ com $j \geq 0$.

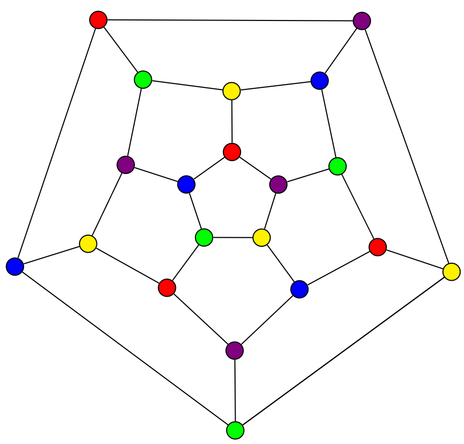

Figure 1. 5-coloração distância-2 do fulerene $G_{0,1}$.

No que segue, mostramos o resultado principal dessa seção. Para isso, primeiro caracterizamos as faces hexagonais nos grafos $G_{0,j}$. Uma face hexagonal é dita *radial*, se está contida no caminho que dista j unidades entre as faces pentagonais, caso contrário, a chamamos de face hexagonal *não radial*.

Teorema 1. *Se G é o grafo fulerene com simetria icosaedral $G_{0,2j+1}$ com $j \geq 0$, então* $\chi_2(G_{0,2j+1}) = 5$.

Proof. A prova segue por indução. Inicialmente, suponha que $j = 0$. Neste caso, a 5-coloração de $G_{0,1}$ segue dada pela Figura 1. Quando $j > 0$, a identificação da coloração entre $G_{0,2j-1}$ e $G_{0,2j+1}$ segue da seguinte forma: Seja $C = u_1u_2 \cdots u_5u_1$ (resp. $C' = v_1v_2 \cdots v_5v_1$) o pentágono central de $G_{0,2j-1}$ (resp. $G_{0,2j+1}$). Colorimos os vértices de C' da seguinte forma, $c(v_i) = c(u_i)$ para todo $i \in [5]$. Seja $e = u_1u_2$ (resp. $e' = v_1v_2$), note que pela definição de $G_{0,2j-1}$ (resp. $G_{0,2j+1}$) existe um pentágono que dista $2j - 1$ (resp. $2j + 1$) unidades partindo na direção de e (resp. e'), denote por P (resp. P') essa face pentagonal. Colorimos os vértices de P' da mesma forma que estão coloridos os vértices de P. Analogamente, podemos repetir esse processo para todos os pentágonos de $G_{0,2j+1}$. Além disso, iremos reproduzir a coloração dos hexágonos que distam até j unidades ao redor de cada pentágono (Figura 2 exibe uma 5-coloração distância-2 parcial do $G_{0,5}$ obtida da 5-coloração distância-2 do $G_{0,3}$ replicando a coloração dos pentágonos correspondentes e dos hexágonos que distam 1 unidade dos pentágonos).

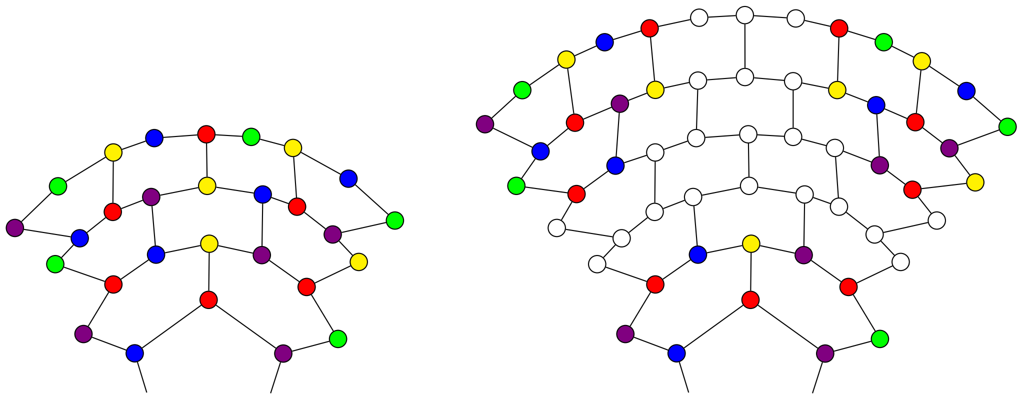

Figure 2. 5-coloração distância-2 parcial do $G_{0,5}$.

Observe que, ao identificarmos a coloração da vizinhança de distância j de $G_{0,2j-1}$ em $G_{0,2j+1}$, teremos sempre pelo menos duas faces hexagonais que não estão completamente coloridas no menor caminho entre duas faces pentagonais. Isso ocorre porque, ao colorirmos j faces hexagonais adjacentes às faces pentagonais, no menor caminho entre duas faces pentagonais, teremos $2j$ faces hexagonais coloridas. Dessa forma, restam apenas duas faces hexagonais não totalmente coloridas nesses caminhos. Portanto, a distância entre quaisquer dois vértices coloridos que estão na vizinhança de pentágonos diferentes será pelo menos 4, o que mantém a coloração distância-2.

Seja F a face pentagonal central e F' uma face pentagonal que dista j unidades de F e seja $e_F = u_1u_2$ e $e_{F'} = v_1v_2$. Note que, pela pré coloração de G_{2i-1}, temos que $c(u_1) = c(v_1)$ e $c(u_2) = c(v_2)$. Seja Q (resp. Q') o caminho de menor comprimento entre u_1 e v_1 (resp. u_2 e v_2). Temos que $|Q| = |Q'| = 4j$ possuem comprimento par. Os extremos de Q e Q' já estão coloridos, pois fazem parte dos vértices dos pentágonos e os vértices à distância j de $u_1, v_1 \in Q$ e $u_2, v_2 \in Q'$ também estarão coloridos pela pré coloração. Colorimos alguns vértices não coloridos de Q e Q' alternadamente pulando sempre um vértice no caminho utilizando as cores dos extremos utilizados em e_F (veja a

Figura 3). Dessa forma, todo hexágono radial contém dois vértices ainda não coloridos, tais vértices serão coloridos na coloração dos hexágonos não radiais.

Seja H uma face hexagonal não radial, para todo $u, v \in H$ se $dist(u, v)$ é ímpar, então $c(u) = c(v)$. Note que, toda face hexagonal não radial, será colorida com 3 cores. Ao final desse processo, todos os vértices não coloridos nas faces hexagonais radiais serão coloridos. $\square$

A Figura 3 exibe uma 5-coloração distância-2 do $G_{0,2j+1}$ obtida através da coloração do $G_{0,2j-1}$ e do método descrito no Teorema 1. O vértice circulado por uma linha tracejada em preto, são os vértices coloridos através do caminho de menor comprimento entre duas faces pentagonais e os circulados em preto, são os vértices coloridos através da coloração das faces hexagonais não radiais.

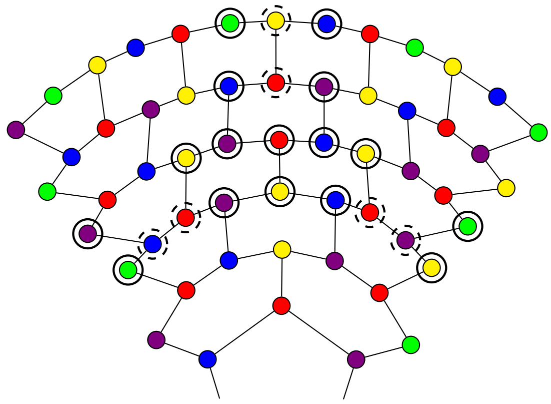

Figure 3. 5**-coloração distância-**2 **do** $G_{0,2j+1}$**.**

3. Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesse artigo nós verificamos a conjectura de Hartke [Hartke et al. 2016] para a subfamília de fulerenes com simetria icosaedral $G_{0,2j+1}$ com $j \geq 0$. Em próximos trabalhos, pretendemos explorar a técnica apresentada no Teorema 1 para a subfamília de fulerenes com simetria icosaedral $G_{0,2j}$ com $j \geq 1$ e na subfamília $G_{j,j}$, com $j \geq 1$. Esperamos que tais resultados possam ser estendidos para outros tipos de fulerenes, como os nanotubos, os nanodiscos e os fuleróides.

References

Andova, V., Došlic, T., Krnc, M., Lužar, B., and Škrekovski, R. (2012). On the diameter and some related invariants of fullerene graphs. *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68(1):109.

Andova, V. and Škrekovski, R. (2013). Diameter of fullerene graphs with full icosahedral symmetry. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 70(1):205–220.

Feder, T., Hell, P., and Subi, C. (2021). Distance-two colourings of barnette graphs. *European Journal of Combinatorics*, 91:103210.

Hartke, S. G., Jahanbekam, S., and Thomas, B. (2016). The chromatic number of the square of subcubic planar graphs. *arXiv preprint arXiv:1604.06504*.

Nicodemos, D. and Stehlík, M. (2016). Fullerene graphs of small diameter. *arXiv preprint arXiv:1604.01934*.

Nicodemos, D. d. S. (2017). Diâmetro de grafos fulerenes e transversalidade de ciclos ímpares de fuleróides-(3, 4, 5, 6).

Wegner, G. (1977). Graphs with given diameter and a coloring problem.