As árvores características dos grafos cordais comparabilidade não possuem grau limitado

Márcia R. Cerioli[1,2], Rodrigo Fernandes Souto[1], Petrucio Viana[3]

[1]Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

[2]Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

[3]Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense (UFF) – Niterói – RJ – Brazil

marcia@cos.ufrj.br, rodrigoilha@cos.ufrj.br, petrucio_viana@id.uff.br

Abstract. *A chordal comparability graph G is a graph that is simultaneously a chordal graph and a comparability graph, that is, every cycle in G of size at least 4 has a chord and G admits a transitive orientation of its edges. Being a chordal graph, every chordal comparability graph has a clique tree. We prove the non-existence of an upper bound for the maximum degree of clique trees of chordal comparability graphs. More specifically, we prove that for every $n \geq 3$, there exists a chordal comparability graph RS_n such that its clique tree is unique and isomorphic to $K_{1,n}$. This result shows a contrast between chordal comparability graphs and interval graphs, another important subclass of chordal graphs, which always have a clique tree whose maximum degree is at most 2.*

Resumo. *Um grafo G é cordal comparabilidade se é simultaneamente cordal e de comparabilidade, ou seja, todo ciclo em G de tamanho pelo menos 4 possui uma corda e G admite uma orientação transitiva de suas arestas. Por ser cordal, todo grafo cordal comparabilidade possui uma árvore característica. Provamos a inexistência de um limite superior para o grau máximo de árvores características dos grafos cordais comparabilidade. Mais especificamente, provamos que para todo $n \geq 3$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n tal que sua árvore característica é única e isomorfa a $K_{1,n}$. Este resultado apresenta um contraste entre os grafos cordais comparabilidade e os grafos de intervalo, outra importante subclasse de grafos cordais, que sempre possuem uma árvore característica cujo grau máximo é menor ou igual a 2.*

1. Grafos cordais comparabilidade

As definições e demonstrações dos conceitos e resultados básicos mencionados no texto podem ser encontradas nos livros [Branstädt et al. 2004, Golumbic 2004, McKee and McMorris 1990].

Nesta seção, revisamos as definições e alguns resultados estruturais importantes sobre as classes dos grafos cordais, de comparabilidade e cordais comparabilidade.

Definição 1 Um grafo G é *cordal* se todo ciclo de tamanho ao menos 4 em G possui uma corda, ou seja, uma aresta que une dois vértices não consecutivos do ciclo. Denotamos a classe de todos os grafos cordais por Cordal.

Além de serem definidos por uma família infinita de subgrafos induzidos proibidos, os grafos cordais possuem várias caracterizações importantes. Em especial, para todo grafo G, são equivalentes: (a) G é grafo cordal; (b) G é grafo de interseção de uma família de subárvores de uma árvore; (c) G possui uma *árvore característica* T, i.e, uma árvore T tal que $V(T)$ é o conjunto das cliques maximais de G e para cada $v \in V(G)$ o conjunto das cliques maximais que possuem v como elemento induzem uma subárvore T_v em T (cf. [McKee and McMorris 1990], p. 24; [Golumbic 2004], p. 92).

Definição 2 Seja (P, R) um conjunto parcialmente ordenado com P finito. O *grafo de comparabilidade de* R é o grafo G_R, tal que, $V(G_R) = P$ e para quaisquer $x, y \in V(G_R)$, temos $xy \in E(G_R)$ se e somente se $x \neq y$ e $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$. Um grafo G é *de comparabilidade* se existe um conjunto parcialmente ordenado finito, tal que G é isomorfo a G_R. Denotamos a classe de todos os grafos de comparabilidade por $\mathsf{Comparabilidade}$.

Grafos de comparabilidade possuem uma caracterização por uma lista infinita de subgrafos induzidos proibidos (cf. [W. T. Trotter 1992], p. 58) e não é conhecida uma caracterização dos grafos de comparabilidade como grafos de interseção. Porém, de acordo com a Definição 2, um grafo G é de comparabilidade se e somente se G possui uma orientação transitiva O_G de suas arestas, i.e., uma relação $O_G \subseteq V(G) \times V(G)$ tal que para todos $u, v, w \in V(G)$: se $(u, v) \in O_G$, então $(v, u) \notin O_G$ e se $(u, v) \in O_G$ e $(v, w) \in O_G$, então $(u, w) \in O_G$. Provamos que esta caracterização alternativa acarreta que um grafo G é de comparabilidade se e somente se é o grafo de inclusão de subestrelas de uma estrela (cf. [McKee and McMorris 1990], p. 129). Uma prova desse resultado, baseada na noção de inclusão estrita, aparece em [Golumbic and Scheinerman 1989].

Definição 3 Um grafo é *cordal comparabilidade* se é, simultaneamente, cordal e de comparabilidade. Denotamos a classe de todos os grafos cordais comparabilidade por $\mathsf{Cordal\ comparabilidade}$.

Apesar da sua definição natural e do seu interesse intrínseco – herdado das classes Cordal e $\mathsf{Comparabilidade}$ – não são conhecidos muitos *resultados estruturais* não triviais sobre $\mathsf{Cordal\ comparabilidade}$. Em particular, os seguintes praticamente exaurem a lista do que é conhecido:

1) Uma caracterização por subgrafos induzidos proibidos, herdada da definição de grafos cordais e da lista de subgrafos induzidos proibidos para os grafos de comparabilidade [Borie and Spinrad 1999].
2) A dimensão linear dos grafos cordal comparabilidade — i.e., o número mínimo de extensões lineares do conjunto parcialmente ordenado que define o grafo, cuja interseção é a ordem dada — é menor ou igual a 4 [Ma and Spinrad 1991].
3) A prova de que o limite superior acima é justo, no sentido de que existe um grafo cordal comparabilidade cuja dimensão linear é igual a 4 [Kierstead et al. 1992].
4) Uma caracterização algébrica dos grafos cordais comparabilidade, baseada no fato que um grafo de comparabilidade G_R é cordal se e somente se as multicadeias de R de tamanho pelo menos 3 podem ser associadas, de uma maneira específica, a um ideal tórico cuja base de Gröbner é quadrática [Ohsugi and Hibi 2016].

Estes resultados deixam em aberto a procura por uma caracterização combinatória (estrutural ou não) dos grafos cordais comparabilidade, assim como sua caracterização como grafos de interseção (de famílias de conjuntos que possuem alguma estrutura adicional).

2. Árvores características dos grafos cordais comparabilidade

Por ser cordal, todo grafo cordal comparabilidade possui uma árvore característica. Nesta seção, provamos a inexistência de um limite superior para o grau máximo das árvores características dos grafos cordais comparabilidade. Este resultado apresenta um contraste entre os grafos cordais comparabilidade e os grafos de intervalo.

Definição 4 Um grafo é *de intervalo* se é isomorfo ao grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real. Denotamos a classe de todos os grafos de intervalo por $\mathsf{Intervalo}$.

Duas das principais caracterizações dos grafos de intervalo são dadas a seguir. Para todo grafo G, as seguintes proprididades são equivalentes: (a) G é grafo de intervalo; (b) G é grafo cordal e seu grafo complemento é grafo de comparabilidade (i.e., de cocomparabilidade). (c) as cliques maximais de G podem ser ordenadas linearmente de maneira que, para cada $v \in V(G)$, as cliques maximais que possuem v como elemento ocorrem consecutivamente na ordenação das cliques (cf. [Branstädt et al. 2004], p. 50).

Pelo item (b), $\mathsf{Intervalo} = \mathsf{Cordal} \cap \mathsf{Cocomparabilidade}$. Pelo item (c), um grafo G é de intervalo se somente se G possui uma árvore característica T_G que é um caminho, isto é, tal que o grau máximo dos vértices de T_G é menor ou igual a 2. Como o nosso foco de investigação está na classe $\mathsf{Cordal} \cap \mathsf{Comparabilidade}$, é natural perguntarmos se existe um limite superior para o grau máximo de T_G quando G é um grafo cordal comparabilidade.

Que este limite não é 2 pode ser visto quando consideramos o grafo *rising-sun*, RS, ilustrado na Figura 1 e suas cliques maximais: $\mathcal{C}_1 = \{a_1, v_1, v_2\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a_2, v_2, v_3\}$, $\mathcal{C}_3 = \{a_3, v_3, v_4\}$, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Provamos que RS é cordal comparabilidade e que a estrela $K_{1,3}$, ilustrada na Figura 1, é a única ávore característica de RS.

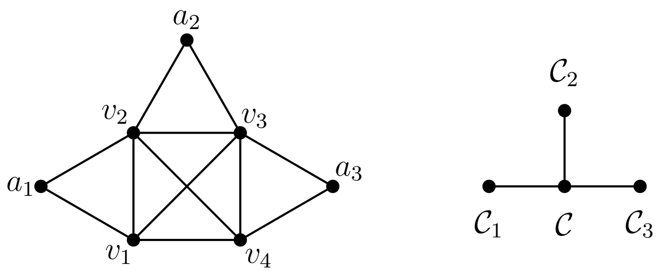

Figura 1. Grafo *rising-sun* e sua árvore característica.

Nosso resultado principal é, a partir do *rising-sun*, definir uma classe de grafos que mostra a não existência de um limite superior para o grau máximo das árvores características dos grafos cordais comparabilidade.

Teorema 1 Para todo $n \geq 3$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n cuja árvore característica é única e isomorfa a $K_{1,n}$.

Dado $n \geq 3$, consideramos o grafo RS_n, ilustrado na Figura 2, e suas cliques maximais: $\mathcal{C}_1 = \{a_1, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a_2, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C}_3 = \{a_3, v_3, v_4, \ldots, v_{n+1}\}$, ..., $\mathcal{C}_n = \{a_n, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{2n-2}\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2n-2}\}$.

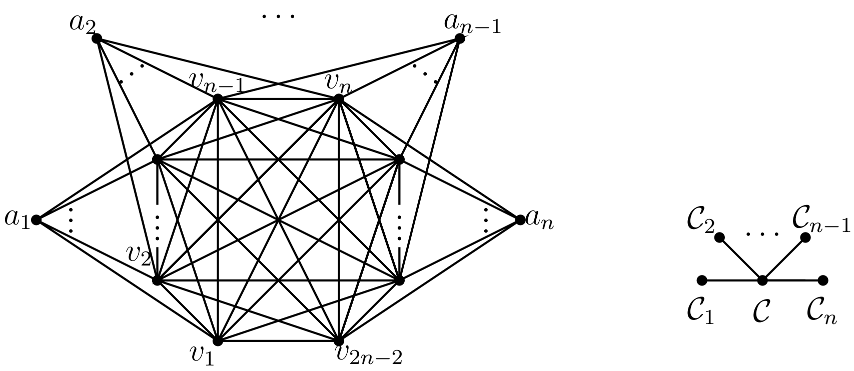

Figura 2. Grafo RS_n e sua árvore característica.

Por construção, RS_n é cordal. Para provarmos que RS_n é de comparabilidade, exibimos uma orientação transitiva O que pode ser resumida do seguinte modo: para a clique maximal $\mathcal{C}$, $(v_n, v_{n+1}), (v_{n+1}, v_{n+2}), \ldots, (v_{2n-2}, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1}) \in O$ (as outras arestas de $\mathcal{C}$ estão orientadas por transitividade); $(a_1, v_j) \in O$ para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$; para cada $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $(a_i, v_j) \in O$ quando $j \in \{i, \ldots, n-1\}$ e $(v_j, a_i) \in O$ quando $j \in \{n, \ldots, n+i-2\}$; $(v_j, a_n) \in O$ para $j \in \{n, \ldots, 2n-2\}$.

Finalmente, a unicidade da estrela $K_{1,n}$, ilustrada na Figura 2, como árvore característica de RS_n, decorre do fato que, para todos $1 \leq i \neq j \leq n$, se as cliques $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$ fossem adjacentes, existiria um ciclo na árvore característica.

Referências

Borie, R. B. and Spinrad, J. P. (1999). Construction of a simple elimination scheme for a chordal comparability graph in linear time. *Discrete Applied Mathematics*, 91:287–292.

Branstädt, A., Le, V. B., and Spinrad, J. P. (2004). *Graph Classes: a Survey*. SIAM.

Golumbic, M. C. (2004). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier.

Golumbic, M. C. and Scheinerman, E. R. (1989). Containment graphs, posets, and related classes of graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 555:92–204.

Kierstead, H. A., Trotter, W. T., and Qin, J. (1992). The dimension of cycle-free orders. *Order*, 9:103–110.

Ma, T.-H. and Spinrad, J. P. (1991). Cycle-free partial orders and chordal comparability graphs. *Order*, 8:46–61.

McKee, T. A. and McMorris, F. R. (1990). *Topics in Intersection Graph Theory*. Elsevier.

Ohsugi, H. and Hibi, T. (2016). A Gröbner basis characterization for chordal comparability graphs. *European Journal of Combinatorics*, 1:75–78.

W. T. Trotter, J. (1992). *Combinatorics and Partially Ordered Sets – Dimension Theory*. Johns Hopkins University Press.