Número da sorte e grafos exoplanares livres de triângulos

Maycon Sambinelli[1] **e Fabio dos Santos de Souza**[1]

[1]Centro de Matemática Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC (UFABC)
Santo André, Brazil

m.sambinelli@ufabc.edu.br souza.f@aluno.ufabc.edu.br

Abstract. *An additive coloring of a graph $G = (V, E)$ is a function $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ such that, for every edge $uv \in E$, we have $S_c(u) \neq S_c(v)$, where $S_c(u) = \sum_{v \in N_G(u)} c(v)$. The lucky number of a graph G, denoted by $\eta(G)$, is the smallest value of k such that exists an additive coloring c. In this work, we show that if G is a triangle-free outerplanar graph, then $\eta(G) \leq 6$. Moreover, we determine the lucky number for Loupekine Snarks.*

Resumo. *Uma coloração aditiva de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que, para toda aresta $uv \in E$, temos que $S_c(u) \neq S_c(v)$, onde $S_c(u) = \sum_{v \in N_G(u)} c(v)$. O número da sorte de um grafo G, denotado por $\eta(G)$, é definido como o menor valor de k tal que c seja uma coloração aditiva. Neste trabalho, provamos que se G é um grafo exoplanar livre de triângulos, então $\eta(G) \leq 6$. Ademais, determinamos o número da sorte para os Snarks de Loupekine.*

1. Introdução

Dada uma coloração $c \colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ de um grafo G (não necessariamente própria), definimos $S_c(u) = \sum_{v \in N_G(u)} c(v)$. Uma *coloração aditiva* de um grafo G é uma função $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ tal que, para toda aresta $uv \in E(G)$, vale que $S_c(u) \neq S_c(v)$. Em 2009, tendo como motivação a famosa Conjectura 1-2-3 [8], a coloração aditiva foi introduzida simultaneamente sob as óticas do número cromático sigma [3] e do número da sorte [4]. Enquanto aqueles estudaram a coloração aditiva sob a ótica do número cromático sigma, estes estudaram sob a ótica do número da sorte.

O *número cromático sigma* de um grafo G, denotado por $\sigma(G)$, é definido como o menor valor de $|\mathrm{Im}(c)|$, onde c é uma coloração aditiva de G e $\mathrm{Im}(c)$ sua imagem. Além de introduzir o número cromático sigma, Chartrand, Okamoto, e Zhang [3] demonstraram que $\sigma(G) \leq \chi(G)$ para qualquer grafo G e que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a \leq b$, existe um grafo G que satisfaz $\sigma(G) = a$ e $\chi(G) = b$. Estes resultados tem três implicações: (i) a diferença entre o número cromático sigma e o número cromático pode ser arbitrariamente grande; (ii) assim como o número cromático, o número cromático sigma não pode ser limitado por uma constante para grafos arbitrários; (iii) $\sigma(G) \leq 4$ para grafos planares. Em 2018, Dehghan, Sadeghi e Ahadi [5] apresentaram alguns resultados sobre a dificuldade computacional do número cromático sigma. Os autores demonstraram que são NP-completos os problemas de decidir se: $\sigma(G) = 2$ para um dado grafo cúbico G; $\sigma(G) = k$ para um dado grafo G e um inteiro $k \geq 3$; e $\sigma(G) = \chi(G)$ para um dado grafo cúbico G. Luzon, Ruiz e Tolentino [9] determinaram o número cromático sigma de algumas famílias de grafos circulantes. Gonzaga e Almeida [6] estudaram o número cromático sigma dos grafos potência de caminhos e de algumas famílias de Snarks. Eles demonstraram que $\sigma(P_n^k) \leq 3$, se $2 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1$, e determinaram o número cromático sigma dos casos restantes. Com relação às famílias de Snarks, os autores determinaram o número cromático sigma das famílias Blanuša, Flower, Goldberg e Twisted Goldberg. De fato, os resultados para as famílias de Snarks são um pouco mais fortes, pois, na verdade, eles determinaram o número da sorte de tais grafos.

O *número da sorte* de um grafo G, denotado por $\eta(G)$ e introduzido por Czerwiński, Grytczuk e Żelazny [4], é o menor valor de k tal que $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ seja uma coloração aditiva. Note que $\sigma(G) \leq \eta(G)$ para qualquer grafo G e, portanto, qualquer limitante superior para o número da sorte também é um limitante superior para o número cromático sigma. Entretanto, um limitante obtido para o número cromático sigma dessa forma pode ser fraco, pois, como demonstrado por Dehghan, Sadeghi e Ahadi [5], a diferença entre esses parâmetros pode ser arbitrariamente grande.

Apesar do número cromático sigma e do número da sorte terem surgido simultaneamente, este tem apresentado um progresso mais modesto do que aquele. Diferentemente do número cromático sigma, ainda não sabemos se o número da sorte é limitado superiormente pelo número cromático, mas tal afirmação foi conjecturada em 2008 por Czerwinski, Grytczuk e Żelazny [4] e confirmada para algumas classes de grafos simples, tais como árvores e grafos bipartidos planares [2]. Enquanto que, para um grafo planar G sabemos que $\sigma(G) \leq 4$, o melhor limitante superior que temos para o número da sorte é 468 [2], que melhorou o limitante anterior de 5544 (veja [2]). Esse limitante superior pode ser reduzido se adicionarmos condições extras ao grafo planar, como também demonstrado por Bartnicki *et al.* [2]. Os autores demonstraram que $\eta(G) \leq 36$ para grafos planares 3-coloríveis e que $\eta(G) \leq 4$ para grafos planares com cintura ao menos 13.

Um grafo G é *exoplanar* se existe uma imersão planar de G tal que todos os vértices de G estão contidos na face externa. A principal contribuição desse trabalho é o Teorema 1. Seguindo uma abordagem similar a empregada em [2], estabelecemos um limitante superior para o número da sorte dos grafos exoplanares livres de triângulos.

Teorema 1. *Se G é um grafo exoplanar livre de triângulo, então $\eta(G) \leq 6$.*

Além do Teorema 1, e seguindo a direção de Gonzaga e Almeida [6] na determinação do número da sorte de famílias de Snarks, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2. *Para todo Snark de Loupekine LO_k^i, vale que $\eta(LO_k^i) = 2$.*

Corolário 3. *Para todo Snark de Loupekine LO_k^i, vale que $\sigma(LO_k^i) = 2$.*

2. Grafos exoplanares livres de triângulos

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 1, precisamos enunciar alguns resultados auxiliares.

Teorema 4 (Albertson e Moore [1]). *Se G é um grafo exoplanar livre de triângulo, então existe uma coloração $c\colon V(G) \to \{1, 2, 3\}$ que satisfaz a seguinte condição*

$$\textit{Se } u, v \in V(G) \textit{ e } c(u) = c(v) = 3, \textit{ então } dist_G(u, v) \geq 3. \tag{1}$$

Teorema 5 (Bartnicki *et al.* [2])**.** *Seja G um grafo bipartido para o qual suas arestas podem ser orientadas de tal forma que todos os vértices possuam grau de entrada no máximo k. Suponha que cada vértice $v \in V(G)$ esteja relacionado com uma lista $L(v)$ de $k+1$ números reais. Então, para qualquer função $q\colon V(G) \to \mathbb{R}$, existe uma coloração de vértices c tal que $c(u) \in L(u)$ para todo $u \in V(G)$ e, para todo $uv \in E(G)$, vale que*

$$q(u) + \sum_{w \in N(u)} c(w) \neq q(v) + \sum_{w \in N(v)} c(w).$$

Lema 6. *Se G é um grafo exoplanar, então existe uma orientação $\vec{G}$ de G tal que $d^-_{\vec{G}}(u) \leq 2$ para todo $u \in V(\vec{G})$.* □

Demonstração do Teorema 1. Seja G um grafo exoplanar livre de triângulo e seja $c\colon V(G) \to \{1,2,3\}$ uma coloração dada pelo Teorema 4. Para $i = 1,2,3$, seja $W_i = \{u \in V(G)\colon c(u) = i\}$. Note que

$$|N_G(u) \cap W_3| \leq 1 \text{ para todo } u \in W_1 \cup W_2. \tag{2}$$

Seja H o subgrafo bipartido de G definido por $V(H) = V(G)$ e

$$E(H) = \{uv \in E(G)\colon u \in W_1 \cup W_2 \text{ e } v \in W_3\}.$$

Seja $F = G[W_1 \cup W_2]$ e note que F é um grafo exoplanar bipartido. Pelo Lema 6 existe uma orientação de F tal que todo vértice tem grau de entrada no máximo 2. Para todo $u \in W_1 \cup W_2$, seja $q(u) = |N_G(u) \cap W_3|$ e seja $L(u) = \{2,4,6\}$. Pelo Teorema 5, existe uma função c tal que, para todo vértice $u \in W_1 \cup W_2$, $c(u) \in \{2,4,6\}$ e, para toda aresta $uv \in E(F)$, vale que

$$|N_G(u) \cap W_3| + \sum_{w \in N_F(u)} c(w) \neq |N_G(v) \cap W_3| + \sum_{w \in N_F(v)} c(w). \tag{3}$$

Seja $g\colon V(G) \to \{1,2,\ldots,6\}$ a função definida como

$$g(u) = \begin{cases} c(u), & \text{se } u \in W_1 \cup W_2; \\ 1, & \text{se } u \in W_3. \end{cases}$$

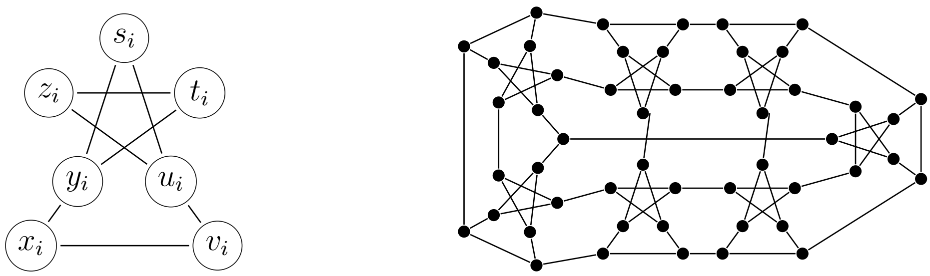
Agora vamos mostrar que g é uma coloração aditiva. Se $u \in W_1 \cup W_2$, então note que

$$\begin{aligned} S_g(u) &= \sum_{w \in N_G(u) \cap (W_1 \cup W_2)} g(w) + \sum_{w \in N_G(u) \cap W_3} g(w) \\ &= \sum_{w \in N_G(u) \cap (W_1 \cup W_2)} c(w) + |N_G(u) \cap W_3|. \end{aligned} \tag{4}$$

Seja $uv \in E(G)$. Se $u, v \in W_1 \cup W_2$, então o resultado segue de (3) e (4). Então, suponha que $u \in W_1 \cup W_2$ e $v \in W_3$. Note que $S_g(u) = \sum_{w \in N_G(u) \cap (W_1 \cup W_2)} c(w) + |N_G(u) \cap W_3|$ é um número ímpar, já que $\sum_{w \in N_G(u) \cap (W_1 \cup W_2)} c(w)$ é um número par, pois $c(w) \in \{2,4,6\}$ para todo $w \in N_G(u) \cap (W_1 \cup W_2)$, e $N_G(u) \cap W_3 = \{v\}$ por (2). Já $S_g(v)$ é um número par, pois

$$S_g(v) = \sum_{w \in N_G(v)} g(w) = \sum_{w \in N_G(v) \cap (W_1 \cup W_2)} c(w)$$

e $c(w) \in \{2,4,6\}$ para todo $w \in W_1 \cup W_3$. Assim, o resultado segue. □



(a) Grafo B_i **(b)** LO_7^1

Figura 1

3. Snarks de Loupekine

Em 1976, F. Loupekine introduziu uma procedimento capaz de gerar um número infinito de Snarks [7]. A família de Snarks gerada por tal construção é chamada de Snarks de Loupekine e seus membros são denotados por LO_k^i, onde $i \in \{1, 2\}$ e $k \geq 3$ é ímpar. Para $i \in \{1, \dots, k\}$, seja B_i o grafo na Figura 1a.

Seja $F_{m,n} = \{z_m t_n, x_m v_n\}$. O grafo LO_k^i é definido como sendo o grafo onde

$$V(LO_k^i) = \bigcup_{i=1}^{k} V(B_i) \cup \{a\} \qquad \text{e}$$

$$E(LO_k^i) = \bigcup_{i=1}^{k} E(B_i) \cup \bigcup_{\substack{2 \leq j \leq k-3 \\ \text{j par}}} F_{j,j+2} \cup \bigcup_{\substack{3 \leq j \leq k-2 \\ \text{j ímpar}}} F_{j+2,j}$$

$$\cup F_{k-1,1} \cup F_{1,k} \cup \{as_1, as_2, as_3\} \cup \bigcup_{2 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \{s_{2i} s_{2i+1}\} \cup Q,$$

onde $Q = \{t_2 z_3, v_2 x_3\}$, se $i = 1$, e $Q = \{t_2 x_3, v_2 z_3\}$, se $i = 2$ (veja Figura 1b).

Demonstração do Teorema 2. Por limitação de espaço, vamos apresentar apenas a demonstração para $i = 1$. Para os grafos LO_k^2, a prova segue de forma semelhante. Primeiro, note que $\eta(G) = 1$ apenas se $d(u) \neq d(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$. Portanto, $\eta(LO_k^i) \geq 2$. Agora vamos mostrar que $\eta(LO_k^1) \leq 2$.

Seja $P = \{4, 6, \dots, k-1\}$ e $I = \{5, 7, \dots, k\}$. Seja $c \colon V(LO_k^1) \to \{1, 2\}$ a seguinte coloração dos vértices de LO_k^1: (i) $c(a) = 2$; (ii) $c(s_i) = 1$ se $i \in \{2, 3\} \cup I$ e $c(s_i) = 2$ quando $i \in P \cup \{1\}$; (iii) $c(z_i) = 1$ se $i \in \{1, 2, 3\} \cup I$ e $c(z_i) = 2$ quando $i \in P$; (iv) $c(t_i) = 1$ se $i \in \{2, 3\} \cup I$ e $c(t_i) = 2$ quando $i \in P \cup \{1\}$; (v) $c(y_i) = c(v_i) = 1$, $c(u_i) = c(x_i) = 2$, para todo $i \in \mathbb{N}_k$.

Pela construção de LO_k, sabemos que:

(a) $S_c(a) = 4$; (b) $S_c(s_i) = 5$ se $i \in \{1, 2, 3\} \cup I$ e $S_c(s_i) = 4$ quando $i \in P$; (c) $S_c(z_i) = 4$ se $i \in I \cup \{3\}$, $S_c(z_i) = 6$ se $i \in P$ e $S(z_i) = 5$ se $i \in \{1, 2\}$; (d) $S_c(t_i) = 3$ se $i \in \{2, 3\} \cup I$, $S_c(t_i) = 4$ se $i \in \{1, 4\}$ e $S_c(t_i) = 5$ se $i \in P \setminus \{4\}$; (e) $S_c(y_i) = 4$ se $i \in \{2, 3\} \cup I$ e $S_c(y_i) = 6$ quando $i \in P \cup \{1\}$; (f) $S_c(u_i) = 3$ se $i \in \{2, 3\} \cup I$, $S_c(u_i) = 4$ se $i \in \{1\}$ e $S_c(u_i) = 5$ se $i \in P$; (g) $S_c(x_i) = 3$ e $S_c(v_i) = 6$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Como $S_c(u) \neq S_c(v)$ para toda aresta $uv \in E(LO_k^i)$, o resultado segue. $\square$

Referências

[1] Michael O. Albertson e Emily H. Moore. Extending graph colorings using no extra colors. *Discrete Math.*, 234(1-3):125–132, 2001.

[2] Tomasz Bartnicki, Bartłomiej Bosek, Sebastian Czerwiński, Jarosław Grytczuk, Grzegorz Matecki, e Wiktor Żelazny. Additive coloring of planar graphs. *Graphs Combin.*, 30(5):1087–1098, 2014.

[3] Gary Chartrand, Futaba Okamoto, e Ping Zhang. The sigma chromatic number of a graph. *Graphs Combin.*, 26(6):755–773, 2010.

[4] Sebastian Czerwiński, Jarosław Grytczuk, e Wiktor Żelazny. Lucky labelings of graphs. *Inform. Process. Lett.*, 109(18):1078–1081, 2009.

[5] Ali Dehghan, Mohammad-Reza Sadeghi, e Arash Ahadi. Sigma partitioning: complexity and random graphs. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 20(2):Paper No. 19, 14, 2018.

[6] Luis Gustavo da Soledade Gonzaga e Sheila Morais de Almeida. Sigma coloring on powers of paths and some families of Snarks. In *The proceedings of Lagos 2019, the tenth Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2019)*, volume 346 of *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, pages 485–496.

[7] R Isaacs. Loupekhine's Snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs. *J. Combin. Theory B*, 1976.

[8] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, e Andrew Thomason. Edge weights and vertex colours. *J. Combin. Theory Ser. B*, 91(1):151–157, 2004.

[9] Paul Adrian D. Luzon, Mari-Jo P. Ruiz, e Mark Anthony C. Tolentino. The sigma chromatic number of the circulant graphs $C_n(1,2)$, $C_n(1,3)$, and $C_{2n}(1,n)$. In *Discrete and computational geometry and graphs*, volume 9943 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 216–227.