

# Nota sobre o tempo mínimo de infecção em 2-neighbour bootstrap percolation em grids partindo de $n + 1$ vértices

Fabício S. Benevides<sup>1</sup>, Matheus A.S. Pascoal<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática  
Universidade Federal do Ceará(UFC) - Fortaleza - CE - Brasil

fabricio@mat.ufc.br, matheusalvpascoal@gmail.com

**Abstract.** We studied the “2-neighbour bootstrap percolation” on  $n \times n$  grids starting from initially infected sets with size exactly  $n + 1$ . We show that the minimum percolation time for  $n \geq 1$ , in this case, is  $n - 1$  if  $n \not\equiv 3 \pmod{4}$  and  $n - 2$  if  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Resumo.** Estudamos o “2-neighbour bootstrap percolation” em grids  $n \times n$  partindo de conjuntos inicialmente infectados de tamanho exatamente  $n + 1$ . Mostramos que o tempo mínimo de percolação para  $n \geq 1$ , neste caso, é  $n - 1$  caso  $n \not\equiv 3 \pmod{4}$  e  $n - 2$  caso  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

## 1. Introdução

A percolação bootstrap, sugerida pelos físicos Chalupa, Leath e Reich em [Chalupa et al. 1979], é um automato celular que modela a propagação de uma infecção em um grid,  $G$ , por um dado conjunto de vértices inicialmente infectados,  $A_0$ . Fixados  $r \in \mathbb{N}$  e  $A_0$ , para  $t \geq 1$ , definimos  $A_t = A_{t-1} \cup \{v \in V(G) : |N(v) \cap A_{t-1}| \geq r\}$ , onde  $N(v)$  é o conjunto de todos os vizinhos de  $v$ . Interpretamos  $A_t$  como os infectados até o tempo  $t$ . Definimos  $\langle A_0 \rangle$  como o conjunto dos vértices eventualmente infectados,  $\langle A_0 \rangle = \bigcup_t A_t$ . Dizemos que  $A_0$  *percola* o grid quando  $\langle A_0 \rangle = V(G)$ .

Este modelo foi amplamente estudado tanto do ponto de vista probabilístico (quando  $A_0$  é aleatório, veja [Balogh and Pete 1998, Pete 1997, Balogh et al. 2012, Bollobás et al. 2014, Guggiola and Semerjian 2015]) como determinístico (veja [Balogh et al. 2010, Benevides and Przykucki 2015, Morris 2009, Przykucki and Shelton 2020]), com perguntas sobre situações extremas. O caso em que o universo é um grid  $n \times n$  e  $r = 2$  tem especial importância dada a relação com problemas de Física-Matemática (veja [Chalupa et al. 1979, Adler and Lev 2003]). Aqui, tratamos apenas deste caso. Porém, problemas de infecção já foram estudados com diferentes nomes (veja [Chen 2009, Bessy et al. 2019], em diferentes grafos ([Guggiola and Semerjian 2015, Riedl 2012]) com diversas regras de infecção (ver [Benevides et al. 2021, Przykucki and Shelton 2020]).

No grafo grid  $n \times n$ , detonado por  $[n]^2$  onde  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , cada vértice é representado por um quadrado unitário e dois vértices são considerados adjacentes se os respectivos quadrados compartilham um lado.

Um problema folclórico consiste em demonstrar que o *menor* número de vértices em um conjunto  $A_0$  que percola  $[n]^2$  é  $n$ . O truque consiste em, para cada  $A_0 \subset [n]^2$ , definir  $\phi(A_0)$  como o perímetro da figura formada pela união dos quadrados que representam

os vértices de  $A_0$  e observar que  $\phi(A_t) \leq \phi(A_{t-1})$  para todo  $t$ . Ademais,  $\phi(\langle A_0 \rangle) = 4n$  quando  $A_0$  percola. Trivialmente também temos que  $\phi(A_t) \leq \phi(A_{t-1}) - 2$  se algum vértice de  $A_t \setminus A_{t-1}$  possuir (pelo menos) 3 vizinhos em  $A_{t-1}$ ; e  $\phi(A_t) \leq \phi(A_{t-1}) - 4$  se algum vértice de  $A_t \setminus A_{t-1}$  possuir 4 vizinhos em  $A_{t-1}$ . Chamaremos isso de *argumento (ou lema) do perímetro*.

Przykucki e Shelton [Przykucki and Shelton 2020] mostraram que em grids  $[n]^d$  e com  $r = d$  a quantidade mínima de vértices em um conjunto que percola é  $n^{d-1}$ . Eles também consideram o tempo mínimo de percolação de um conjunto que usa a quantidade mínima de vértices. Já o tempo máximo de percolação de um conjunto qualquer em  $n \times n$  foi obtido em [Benevides and Przykucki 2015].

Dados  $n, \ell$  naturais com  $\ell \geq n$ , seja  $m(\ell, n)$  o tempo mínimo de percolação em  $[n]^2$  partindo de algum conjunto  $A_0$  com  $\ell$  vértices. Przykucki e Shelton provaram que  $m(n, n) = n - 1$ . Aqui, consideramos o caso  $\ell = n + 1$ :

**Teorema 1.1.** Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $A_0 \subset [n]^2$  tal que  $\langle A_0 \rangle = [n]^2$  e  $|A_0| = n + 1$ . Então

$$m(n + 1, n) = \begin{cases} n - 2, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ n - 1, & \text{se } n \not\equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Fixado um conjunto inicial  $A_0$  que percola (que será omitido da notação por simplicidade), para  $v \in [n]^2$  denotamos por  $t(v)$  o tempo em que  $v$  foi infectado. Para  $W \subset [n]^2$ , definimos  $t(W)$  como o tempo de infecção do último vértice de  $W$  a ser infectado.

## 2. Preliminares

**Definição 2.1.** Sejam  $k \in \mathbb{N}$  e  $P = v_1 v_2 \dots v_k$  um caminho formado por vértices (distintos) em  $[n]^2$ . Dizemos que  $P$  é um **caminho de infecção estrita** quando  $v_1 \notin A_0$  e  $t(v_i) > t(v_{i-1})$  para todo  $i$  com  $2 \leq i \leq k$ . Note que isso quer dizer que no tempo  $t(v_{i-1})$  o vértice  $v_i$  é um vizinho não infectado de  $v_{i-1}$ .

Se a infecção iniciada por  $A_0$  tem um caminho  $P$  de infecção estrita com  $k$  vértices,  $t(V(P)) \geq k$  e, portanto,  $A_0$  leva tempo pelo menos  $k$  para percolar. Com isso, a ideia da prova do Teorema 1.1 é encontrar, para todo  $A_0$ , um caminho estrito de tamanho bom.

**Definição 2.2.** Sejam  $v \in [n]^2$ ,  $t \in \mathbb{N}$  e  $k \in \{2, 3, 4\}$ , dizemos que  $v$  é um **knock- $k$**  quando:  $v$  tem exatamente  $k$  vizinhos no grid e  $N(v) \subset A_{t(v)}$ . Veja que alguns dos vizinhos de  $v$  podem ter sido infectados no mesmo instante que  $v$ .

*Observação.* Os vértices knock-2 são exatamente os quatro cantos do grid menos  $A_0$ . O último vértice de um caminho de infecção estrita maximal é sempre um knock- $k$ .

**Proposição 2.3.** Sejam  $t, k \in \mathbb{N}$ . Se  $v_1 v_2 \dots v_k$  é um caminho em que todos os vértices são infectados exatamente no tempo  $t$ , então  $\phi(A_{t-1}) \geq \phi(A_t) + 2(k - 1)$ .

*Esboço da demonstração.* Observe que para cada extremidade do caminho perdemos uma unidade de perímetro e para cada vértice interno perde-se 2 unidades.  $\square$

Isso limita a quantidade de pares de vértices vizinhos infectados simultaneamente no grid. Ademais:

**Proposição 2.4.** Sejam  $k \in \{2, 3, 4\}$ ,  $t \in \mathbb{N}$  e  $v \in [n]^2$ . Se  $v$  é um knock- $k$  e  $t(v) = t$ , então  $\phi(A_{t-1}) \geq \phi(A_t) + 2(k - 2)$ .

*Demonstração.* Se  $v$  for um knock-2, nada há a fazer. Suponha que  $v$  é um knock-3 e seja  $N(v)$  os vizinhos de  $v$  em  $[n]^2$ . Por definição  $|N(v)| = 3$ . Caso  $N(v) \subset A_{t-1}$ , o lema do perímetro nos dá o desejado. Se  $N(v) \not\subset A_{t-1}$  a proposição 2.3 nos dá o desejado. O caso  $v$  sendo knock-4 é análogo.  $\square$

**Corolário 2.5.** Seja  $A_0 \subset [n]^2$  um conjunto de vértices inicialmente infectados que percola com  $|A_0| = n + 1$ . Então o processo de infecção iniciado por  $A_0$  gera no máximo dois knock-3 ou um knock-4.

*Demonstração.* Basta usar a proposição 2.4 e notar que  $4n \leq \phi(A_0) \leq 4n + 4$ .  $\square$

### 3. Esboço da prova do teorema 1.1

Um conjunto  $A_0$  como o à esquerda na figura 1 percola um grid  $[n]^2$  em tempo  $n - 1$ . E o da direita percola em tempo  $n - 2$ . Porém, este último só está definido quando  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Isso nós dá o limitante superior para  $m(n + 1, n)$ .



**Figura 1.**  $A_0$  que percola em tempo  $n - 1$  (à esquerda) e  $n - 2$  (à direita).

Resta mostrar que não existem conjuntos que percolam mais rápido. O caso em que  $n \leq 4$  é trivial. Suponha  $n \geq 5$ , seja  $A_0$  qualquer conjunto inicial que percola. Vamos construir um caminho de infecção estrita com pelo menos  $n - 1$  vértices se  $n \not\equiv 3 \pmod{4}$ . Caso  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , vamos argumentar que a única configuração que percola em tempo até  $n - 2$  é a extensão daquela direita da figura 1.

Seja  $C$  o conjunto dos 4 vértices adjacentes ao centro do grid  $[n]^2$  no caso em que  $n$  é par (veja a figura 2); ou um dos conjuntos compostos pelo centro e os seus vizinhos no caso em que  $n$  é ímpar.



**Figura 2.** À esquerda,  $C$  quando  $n$  é par. À direita, quando  $n$  é ímpar.

Considere o grid como a união de 4 quadrantes  $\lceil n/2 \rceil \times \lceil n/2 \rceil$ ,  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_4$ , cada um contendo um dos cantos (quando  $n$  é ímpar, eles se intersectam) e numerados como na Figura 2. Note que,  $(n, n) \in Q_1, (1, n) \in Q_2, (1, 1) \in Q_3$  e  $(n, 1) \in Q_4$ . Defina  $D_i$  como o conjunto dos  $\lceil n/2 \rceil - 1$  vértices de  $Q_i$  que estão numa diagonal do grid e não sejam cantos dele. Para  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ , defina  $D_{ij}$  o conjunto dos vértices delimitados por  $D_i, D_j$  e pela borda do grid contida em  $Q_i \cup Q_j$ , de forma que  $D_{ij}$  inclui  $D_i$  e  $D_j$  porém não inclua tal borda. Pelo Corolário 2.5, há 3 casos.

**Caso 1:**  $A_0$  não gera nenhum knock-3 nem knock-4. Neste caso, os únicos knock são os cantos. Ademais, pelo argumento do perímetro, existe um vértice  $v_1$  de  $C$  que não está em  $A_0$ . Assim, podemos montar um caminho de infecção estrita maximal,  $P$ , partindo de  $v_1$ . Como  $P$  termina em um canto, é trivial que  $t(P) \geq n - 1$ .

**Caso 2:**  $A_0$  gera pelo menos um knock-3, então  $A_0$  não gera knock-4 pelo Corolário 2.5. Caso  $A_0$  admita um único knock-3, pode-se supor, sem perda da generalidade, que ele está na borda inferior. Assuma que o knock-3 é o único vértice infectado por 3 dos seus vizinhos. Tome um  $v_1 \in C \setminus A_0$ , como no caso 1, para ser o vértice inicial de um caminho de infecção estrita maximal  $P$ . Como não há knock-4,  $P$  termina numa borda. Suponha que construímos o início de  $P$ ,  $(v_1 \dots v_k)$ , de modo que  $N(v_k)$  intersekte uma única borda,  $B$ , porém  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$  não intersekte nenhuma borda (observe que tal construção é garantida pela Proposição 2.4). Com isso, note que, pelo argumento do perímetro, o conjunto  $(N(v_k) - \{v_{k-1}\}) \cap A_{t(v_k)-1}$  é unitário, assim, podemos tomar  $v_{k+1}$  de modo que  $B$  não seja a primeira borda a ser intersectada pelo caminho  $P$ . Chamaremos esse argumento de *argumento da borda*. Em particular, tomando  $B$  como a borda inferior, isso garante que podemos montar  $P$  de tal sorte que a borda inferior não seja a primeira borda a ser intersectada por  $P$ .

Agora, ainda admitindo apenas um knock-3, suponha que exista outro vértice  $v$  tal que ele seja infectado por exatos 3 de seus vizinhos. Sejam  $i, j \in [4]$  tais que  $v \in D_{ij}$ . Se  $v \in C$ , escolha  $v_1 \in C \setminus A_0$  livremente para primeiro vértice do caminho de infecção estrita maximal  $P$ . Pelo argumento da borda, os limitantes seguem. Caso  $v \notin C$ , observe que há um vértice  $v_1 \in (C \cap D_{st}) \setminus A_0$ , onde  $\{s, t\} = [4] \setminus \{i, j\}$ . Pelo argumento do perímetro somado ao argumento da borda, podemos construir  $P$  partindo de  $v_1$  tal que a primeira borda que  $P$  intersecta não é a inferior. Seja  $v_b$  o primeiro vértice na construção de  $P$  a pertencer uma borda. Como a distância mínima de  $v_b$  a um knock é a distância de  $v_b$  a um canto, claramente pode-se terminar de construir  $P$  de tal modo que  $V(P) \geq n - 1$ .

Por fim, assuma que  $A_0$  admite 2 knock-3. Neste caso, seja  $v'$  o knock-3 que não está na borda inferior. Sejam  $i, j \in [4]$  tais que  $v' \in D_{ij}$ . Tome  $v_1$  em  $(C \cap D_{st}) \setminus A_0$  onde  $\{s, t\} = [4] \setminus \{i, j\}$  como o vértice inicial de  $P$ . Seja  $v_k$ , como antes, um vértice na iminência de alguma borda com  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$  não intersectando nenhuma borda. Pelo argumento da borda, podemos supor que  $N(v_k)$  intersecta duas bordas simultaneamente. Suponha que as duas contenham um knock-3. Nestas condições, a escolha de  $v_1$  nos garante que  $k \geq n - 2$ . Logo, qualquer escolha atende os limitantes desejados. Do contrário, faça  $v_{k+1}$  um vértice na borda sem knock-3. Dessa forma, o argumento do parágrafo anterior garante que os limitantes são atendidos.

**Caso 3:**  $A_0$  gera um knock-4. Pelo corolário 2.5, há apenas um knock-4 e não há knock-3. Se  $n$  é par ou  $N(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \not\subset A_0$ , pode-se tomar um  $v_1 \in C \setminus A_0$  que não seja knock-4. Neste caso, pelo lema do perímetro, pode-se construir um caminho estrito maximal  $P$  partindo de  $v_1$  e que não termine no knock-4 (evitando ir em sua direção). Portanto, termina em um canto e, dessa forma,  $t(P) \geq n - 1$ . Caso contrário,  $n$  é ímpar e o knock-4 é o vértice  $(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$ . Com argumentos semelhantes encontramos um caminho estrito com pelo menos  $n - 2$  vértices. Tal caminho só não pode ser expandido para  $n - 1$  vértices quando  $n \equiv 3 \pmod{4}$  e  $A_0$  segue o padrão da direita figura 1.  $\square$

**Conjectura 3.1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \neq 1$ , então  $m(2n, n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  e  $m(2n-1, n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

## Referências

- Adler, J. and Lev, U. (2003). Bootstrap percolation: visualizations and applications. *Brazilian Journal of Physics*, 33:641–644.
- Balogh, J., Bollobás, B., Duminil-Copin, H., and Morris, R. (2012). The sharp threshold for bootstrap percolation in all dimensions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(5):2667–2701.
- Balogh, J., Bollobás, B., and Morris, R. (2010). Bootstrap percolation in high dimensions. *Combinatorics, Probability and Computing*, 19(5-6):643–692.
- Balogh, J. and Pete, G. (1998). Random disease on the square grid. *Random Structures & Algorithms*, 13(3-4):409–422.
- Benevides, F., Bermond, J.-C., Lesfari, H., and Nisse, N. (2021). *Minimum lethal sets in grids and tori under 3-neighbour bootstrap percolation*. PhD thesis, Université Côte d’Azur.
- Benevides, F. and Przykucki, M. (2015). Maximum percolation time in two-dimensional bootstrap percolation. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(1):224–251.
- Bessy, S., Ehard, S., Penso, L. D., and Rautenbach, D. (2019). Dynamic monopolies for interval graphs with bounded thresholds. *Discrete Applied Mathematics*, 260:256–261.
- Bollobás, B., Holmgren, C., Smith, P., and Uzzell, A. J. (2014). The time of bootstrap percolation with dense initial sets. *The Annals of Probability*, 42(4):1337–1373.
- Chalupa, J., Leath, P. L., and Reich, G. R. (1979). Bootstrap percolation on a bethe lattice. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 12(1):L31.
- Chen, N. (2009). On the approximability of influence in social networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(3):1400–1415.
- Gugliola, A. and Semerjian, G. (2015). Minimal contagious sets in random regular graphs. *Journal of Statistical Physics*, 158:300–358.
- Morris, R. (2009). Minimal percolating sets in bootstrap percolation. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(R2):1.
- Pete, G. (1997). *Disease processes and bootstrap percolation*. PhD thesis, Bolyai Institute, Jzsef Attila University, Szeged.
- Przykucki, M. and Shelton, T. (2020). Smallest percolating sets in bootstrap percolation on grids. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P4–34.
- Riedl, E. (2012). Largest and smallest minimal percolating sets in trees. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P64–P64.