

# Controlando o fogo nos fulerenos\*

Sérgio Fusquino<sup>1</sup>, Diego Nicodemos<sup>1,2</sup>, Diana Sasaki<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

<sup>2</sup>Colégio Pedro II (CP2) – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

sergio.fusquino@pos.ime.uerj.br, diegonicodemos@cp2.g12.br,

diana.sasaki@ime.uerj.br

**Abstract.** *The Firefighter problem was introduced by Hartnell in 1995 and corresponds to a scenario in which a fire breaks out at one or more vertices of a graph and spreads to all adjacent vertices that have not been protected in previous steps. In this paper, we present an algorithm of the Firefighter problem to an infinite family of fullerene graphs with full icosahedral symmetry, providing a surviving rate of at least 50%.*

**Resumo.** *O problema do Bombeiro foi introduzido por Hartnell em 1995 e consiste em um incêndio que começa em um ou mais vértices de um grafo e se espalha para todos os vértices adjacentes que ainda não foram protegidos. Neste trabalho nós apresentamos um algoritmo do problema do Bombeiro para uma família infinita de grafos fulerenos com simetria icosaédrica completa, fornecendo uma taxa de sobrevivência de pelo menos 50%.*

## 1. Introdução

Em 1995, [Hartnell 1995] introduziu o problema do Bombeiro em grafos, que consiste em um incêndio que começa em um ou mais vértices de um grafo e, em seguida, um conjunto não vazio de vértices não incendiados são defendidos tornando-se ininflamáveis. A cada nova etapa, o fogo se espalha para todos os vértices adjacentes que não foram protegidos nas etapas anteriores e, novamente, um ou mais vértices podem ser defendidos pelos bombeiros, até que o fogo pare de se espalhar. Um dos objetivos deste problema é minimizar o número de vértices incendiados do grafo.

O  $MVS(G, r, d)$  é o número máximo de vértices defendidos em  $G$ , quando o fogo se inicia em um vértice aleatório  $r$ , com no máximo  $d$  bombeiros por etapa. Nas figuras deste trabalho, vértices vermelhos representam vértices incendiados, vértices azuis representam vértices defendidos e vértices pretos representam vértices indiretamente defendidos. Um vértice *incendiado* é denotado por  $b_k$ , onde  $k \geq 1$  indica a etapa que o vértice foi incendiado. Um vértice *defendido* é denotado  $d_k$ , onde  $k \geq 1$  indica a etapa que o vértice foi defendido.

O parâmetro  $sn_k(G, v)$  representa o maior número de vértices no grafo  $G$  que podem ser defendidos por  $k$  bombeiros, dado que o incêndio começa no vértice  $v$ . Esse número pode variar significativamente com base no vértice inicial  $v$ , por exemplo em

---

\*Trabalho realizado com apoio da CAPES, do CNPq e da FAPERJ.

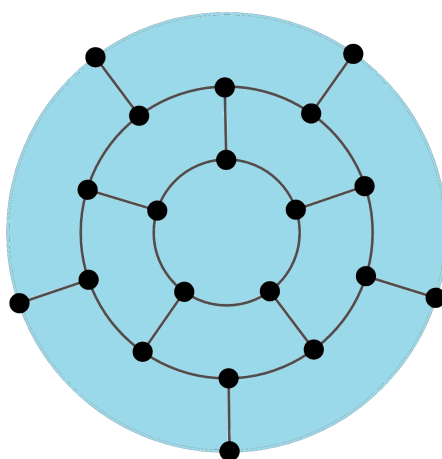
grafos estrela. Introduzida por [Cai and Wang 2009], a *taxa de sobrevivência*  $k$ , denotada por  $\rho_k(G)$ , é definida pela Equação 1. Em grafos regulares, esta taxa pode ser entendida como a razão entre o número de vértices defendidos e o número total de vértices do grafo, onde  $k$  representa o número de vértices defendidos por etapa ( $k$  bombeiros). Neste trabalho, consideramos  $k = 1$ , ou seja, taxa de sobrevivência 1, denotada simplesmente por *taxa de sobrevivência*.

$$\rho_k(G) = \frac{1}{|V(G)|^2} \sum_{v \in V(G)} sn_k(G, v) \quad (1)$$

Neste trabalho, investigamos a taxa de sobrevivência em uma família infinita de grafos cúbicos. Sabe-se que [Finbow et al. 2007] mostraram que é NP-difícil encontrar uma estratégia ótima para o problema do Bombeiro em árvores com grau máximo 3 se o fogo começa em um vértice de grau 3. Caso o fogo comece em um vértice de grau 1 ou 2, existe uma estratégia em tempo polinomial. Nossa motivação é a seguinte questão proposta por [Costa 2015].

**Questão** ([Costa 2015]). *Para quais subclasses de grafos com grau máximo 3 é possível calcular a taxa de sobrevivência?*

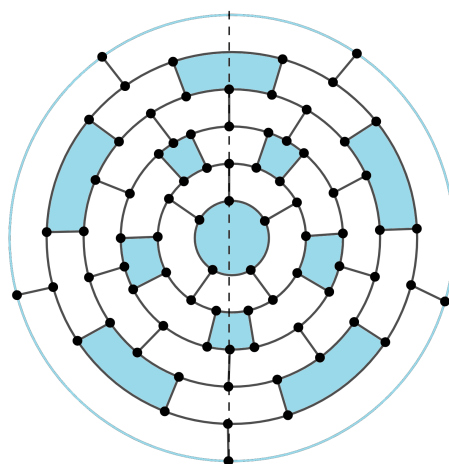
Os *grafos fulerenos* são grafos cúbicos, planares e 3-conexos contendo somente faces pentagonais ou hexagonais. Esses grafos são modelos matemáticos de moléculas alótropas às de diamante, compostas apenas de átomos de carbono contendo 12 faces pentagonais e um número não específico de faces hexagonais ( $0$  ou  $\geq 2$ ). Essas moléculas foram experimentalmente concebidas por [Kroto et al. 1985] e têm propriedades físico-químicas notáveis, amplamente estudadas em diversos ramos da ciência. Na Figura 1 temos um exemplo de grafo fulereno bem conhecido, o Dodecaedro.



**Figura 1. Exemplo de grafo fulereno.**

Dado um grafo  $G$  conexo e planar, definimos a distância entre as faces  $F_a$  e  $F_b$  de  $G$ , denotada por  $dist_G(F_a, F_b)$ , a partir da distância entre os seus correspondentes vértices  $a$  e  $b$  em  $G^*$ , grafo dual de  $G$ , denotada por  $dist_{G^*}(a, b)$ , da seguinte forma  $dist_G(F_a, F_b) = dist_{G^*}(a, b)$ .

Um grafo fullereno com simetria icosaedral completa, denotado por  $G_{i,0}$ , onde  $i \geq 1$ , é um grafo fullereno perfeitamente simétrico de modo que cada face pentagonal equidista  $i$  unidades de exatas outras 5 faces pentagonais. Além disso, o caminho mínimo de comprimento  $i$  nos grafos  $G_{i,0}$  entre cada face pentagonal é único. Os  $20i^2$  vértices de  $G_{i,0}$  estão distribuídos em  $3i$  ciclos concêntricos (*ciclos auxiliares*). Convém observar que esses grafos possuem  $10i^2 - 10$  faces hexagonais e sempre 12 faces pentagonais. Isto indica que há um crescimento quadrático no número de faces hexagonais que compõem  $G_{i,0}$ , afetando o número de etapas para o espalhamento do fogo que passa a precisar de mais etapas para percorrer toda uma face hexagonal, se comparado à uma face pentagonal. A reta que passa pela mediatriz da face pentagonal central, que separa  $|V(G_{i,0})| - 4i$  vértices do grafo à esquerda e à direita, é chamada de *eixo de simetria  $r$*  e é representada por uma linha tracejada. Como exemplo, apresentamos o grafo  $G_{2,0}$  na Figura 2.



**Figura 2.** Grafo  $G_{2,0}$  consistindo de  $20 \cdot 2^2 = 80$  vértices,  $3 \cdot 2 = 6$  ciclos auxiliares,  $10 \cdot 2^2 - 10 = 30$  faces hexagonais e 12 faces pentagonais coloridas de azul. Note que a face pentagonal externa está representada pela cor azul no ciclo auxiliar correspondente  $3i$ .

## 2. Resultado

Em trabalho anterior [Fusquino et al. 2023], mostramos que o número máximo de vértices defendidos em  $G_{1,0}$ , é igual a 9 e, conseqüentemente, a taxa de sobrevivência é de 45%. Esse resultado serviu de inspiração para que pudéssemos chegar ao Teorema 1, que fornece um limite inferior para a taxa de sobrevivência nos grafos fullerenos com simetria icosaedral completa  $G_{i,0}$ , para  $i \geq 2$ .

**Teorema 1.** *Todo grafo fullereno com simetria icosaedral completa possui  $\rho_1(G_{i,0}) \geq 50\%$ ,  $i \geq 2$ .*

*Ideia da prova.* Esse resultado se baseia no algoritmo que separa os vértices incendiados majoritariamente à esquerda do eixo de simetria, dos vértices defendidos majoritariamente à direita do eixo de simetria. Além disso, o algoritmo defende pelo menos a metade dos  $4i$  vértices do  $G_{i,0}$  que interceptam o eixo de simetria. Definimos  $v_k$  como um vértice do eixo de simetria  $r$  no ciclo auxiliar  $c_k$ , i. e.,  $v_k \in c_k \cap r$ ,  $k \in \{1, \dots, 3i\}$ . Além disso, o vértice  $u^a$  pertencente ao ciclo auxiliar  $c_k$  é chamado de *vértice adjacente à esquerda do*

eixo  $r$  quando esse está localizado à esquerda de  $r$  e  $dist(u^a, v_k)$  é máxima dentre todos os vértices de  $c_k$ . Seja  $u$  um vértice do ciclo auxiliar  $c_k$ . Definimos a distância de  $u$  ao eixo de simetria  $r$  como segue:

$$dist(u, r) = \min \begin{cases} dist(u, v_k), \text{ tal que } v_k \in c_k \cap r \\ dist(u, u^a) + \frac{1}{2}, \text{ tal que } u^a \in c_k \end{cases}$$

O algoritmo acontece da seguinte forma. A cada etapa  $j$  escolhemos um vértice a ser defendido  $d_j$  sempre mantendo o eixo de simetria como referência. Se algum vértice incendiado pertence ao eixo de simetria, então defendemos o vértice do mesmo ciclo auxiliar adjacente ao vértice incendiado à direita do eixo  $r$ ; caso contrário, consideramos o vértice incendiado de menor distância ao eixo, e defendemos o vértice à direita deste. Podemos observar que não temos dois vértices incendiados em uma mesma etapa de mesma distância ao eixo, pois o fogo não se alastra de forma uniforme em todo o grafo  $G_{i,0}$ . O algoritmo assegura que há pelo menos metade dos vértices salvos à direita do eixo de simetria. Sendo assim, a taxa de sobrevivência é pelo menos 50%.

Na Figura 3 mostramos o resultado de sua aplicação nos grafos  $G_{2,0}$  e  $G_{3,0}$ , com uma taxa de sobrevivência  $\rho_1(G_{2,0}) \geq 50\%$  e  $\rho_1(G_{3,0}) \geq 53\%$ .  $\square$

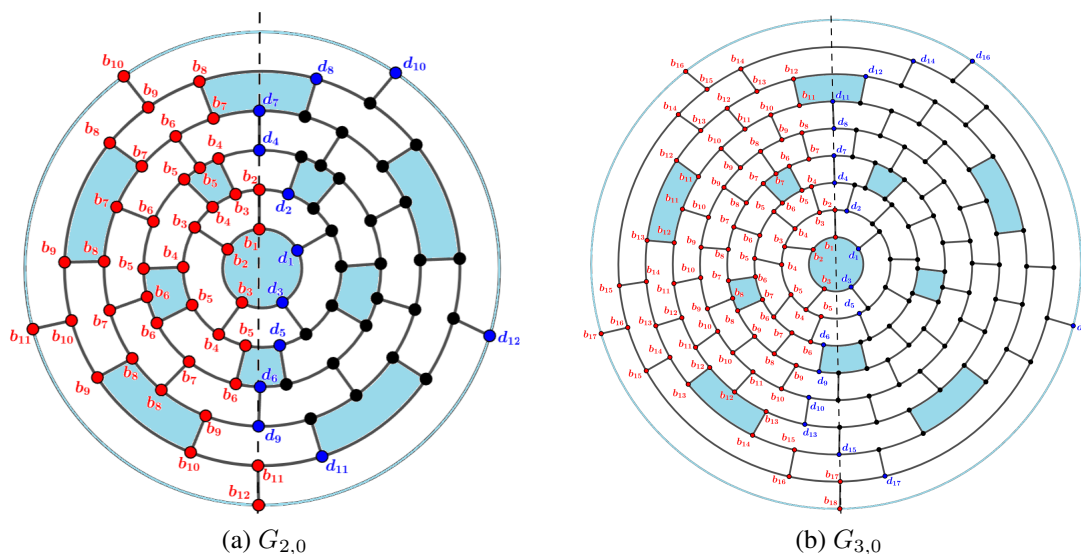


Figura 3. Ilustração do algoritmo que garante uma taxa de sobrevivência maior ou igual a 50% nos grafos fullerênicos  $G_{2,0}$  e  $G_{3,0}$ .

### 3. Considerações Finais

Como trabalhos futuros, investigaremos o problema do Bombeiro em outras classes de grafos cúbicos, como os snarks.

### Referências

Cai, L. e Wang, W. (2009). The Surviving Rate of a Graph for the Firefighter Problem. *Discrete Math*, 23:1814–1826.

- Costa, V. (2015). Estudando Emparelhamentos e Combatendo Incêndios: Em Busca de Novos Limites em Teoria dos Grafos. PhD thesis, Universidade Federal Fluminense.
- Finbow, S., King, A., MacGillivray, G., e Rizzi, R. (2007). The firefighter problem for graphs of maximum degree three. Discrete Math, 307:2094–2105.
- Fusquino, S., Sasaki, D., e Nicodemos, D. (2023). The dodecahedron is on fire. Submitted.
- Hartnell, B. (1995). Firefighter! An application of domination. In The 25th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing.
- Kroto, H. W., Heath, J. R., O'Brien, S. C., Curl, R. F., e Smalley, R. E. (1985).  $C_{60}$ : Buckminsterfullerene. Nature, 318:162–163.