Complexidade parametrizada do problema de reconfiguração de separadores

Guilherme de C. M. Gomes, Vinicius F. dos Santos

[1] Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – Belo Horizonte, MG – Brazil

{gcm.gomes,viniciussantos}@dcc.ufmg.br

Abstract. *A graph separator is a set of vertices that, once removed, destroys all paths between two given vertices of the graph. In particular, we say that a set of vertices is an st-separator if its removal destroys all paths between s and t. Reconfiguration problems have in their input two combinatorial object, and our goal is to transform one into the other while maintaining certain properties during the process. In the separator recongiguration problems, we are given a graph G, two separators A and B, and, using only a pre-specified reconfiguration rule, we wish to transform A into B such that every intermediate step is also an st-separator. This problem is know nto be* NP-dificil *and, in some versions,* PSPACE-dificil. *In this work, we begin the study of the parameterized complexity of this problem, presenting its first positive results and some discussions on other parameterizations.*

Resumo. *Separadores em grafos são conjuntos de vértices cuja remoção destrói todos os caminhos entre dois vértices dados. Em particular, dizemos que um conjunto é um st-separador se sua remoção destrói todos os caminhos entre dois vértices s e t. Problemas de reconfiguração recebem como entrada dois objetos combinatórios e o objetivo é transformar um no outro, mantendo certas propriedades ao longo da transformação. No problema de reconfiguração de separadores, são dados um grafo G e dois st-separadores A e B e deseja-se transformar A em B utilizando certas operações de modificação, de maneira que todos os passos intermediários sejam, também, st-separadores. Este problema é* NP-dificil *e, em algumas versões, é* PSPACE-dificil. *Neste trabalho, consideramos pela primeira vez a complexidade parametrizada deste problema de reconfiguração e mostramos resultados positivos para uma parametrização estrutural, além de discutir outras parametrizações naturais.*

1. Introdução

Problemas de reconfiguração recentemente emergiram em diferentes áreas da ciência da computação, como satisfabilidade (Makino et al., 2011), satisfação de restrições (Gopalan et al., 2006), geometria computacional (Kanj and Xia, 2015; Lubiw and Pathak, 2015), e teoria quântica de complexidade (Gharibian and Sikora, 2015). Apesar dessa aparente novidade, questões de reconfiguração têm sido apresentadas em matemática por mais de um século (Johnson and Story, 1879).

Problemas de reconfiguração também têm atraído a atenção da comunidade de teoria dos grafos, com trabalhos sobre a reconfiguração de diferentes estruturas clássicas aparecendo na literatura. Dentre estes, o tópico mais abundante tem sido sobre o problema RECONFIGURAÇÃO DE CONJUNTOS INDEPENDENTES, com dezenas de artigos destinados ao tema (Bonamy and Bousquet, 2014; Demaine et al., 2015; Hearn and Demaine, 2005; Ito et al., 2011, 2014; Lokshtanov and Mouawad, 2018; Mouawad et al., 2014, 2016). Porém ele não é o único, e outros problemas, como RECONFIGURAÇÃO DE CLIQUES (Ito et al., 2011, 2015) e RECONFIGURAÇÃO DE COLORAÇÃO DE VÉRTICES (Bonamy et al., 2012; Bonsma and Cereceda, 2007; Cereceda et al., 2011; Mouawad et al., 2014) também têm atraído atenção. Muitos destes trabalhos formalizam seus problemas por meio do *arcabouço de reconfiguração*. Nesse contexto, um conjunto de tokens é colocado em vértices do grafo de entrada e é dito um *estado válido*, ou simplesmente *estado*, se ele satisfaz a propriedade desejada como, por exemplo, ser um st-separador; note que cada vértice pode ter no máximo um único token. Dois estados são ditos *adjacentes* se podemos aplicar uma operação atômica a um deles para obter o outro. Três tipos de operações têm recebido atenção considerável na literatura: **Token Sliding (TS)** – movemos o token de um vértice v para um de seus vizinhos; **Token Jumping (TJ)** – um token pode ser movido de um vértice para qualquer outro; **Token Addition/Removal (TAR)** – adicionamos ou removemos um token a/de um vértice de cada vez. Utilizando as regras TS e TJ, a cardinalidade do conjunto de tokens permanece inalterado durante todo o processo de reconfiguração, o que claramente não é o caso para a regra TAR. Para evitar soluções triviais nessa regra, como conjuntos independentes vazios, é comum impor um limite de tamanho mínimo ou máximo dos estados intermediários e nos referimos à regra como k-TAR.

Mais recentemente, o problema de RECONFIGURAÇÃO DE SEPARADORES foi introduzido e estudado em (Gomes et al., 2020). Nele, os autores provaram que as regras TAR e TJ são equivalentes para esse problema e que, sob elas, o problema é NP-completo em grafos bipartidos mas, sob TS, o problema é PSPACE-completo. Por outro lado, mostraram que existem algoritmos polinomiais para TAR/TJ em grafos série-paralelo, grafos livres de $\{3P_1, diamante\}$, e para grafos com número polinomial de separadores minimais (conhecidos como grafos *tame*).

Neste trabalho, damos continuidade ao estudo de RECONFIGURAÇÃO DE SEPARADORES iniciado em (Gomes et al., 2020), nos aprofundando na complexidade parametrizada do problema. Dizemos que um problema parametrizado por k está em FPT se existe um algoritmo que roda em tempo $f(k)n^{\mathcal{O}(1)}$ onde f é uma função computável e n é o tamanho da entrada. Em particular, provamos que, sob a parametrização da distância para clique, o problema é FPT. Note que este parâmetro é similar ao número de cobertura de um grafo, correspondente ao tamanho mínimo de uma cobertura por vértices. Mais precisamente, a distância para clique de um grafo corresponde ao número de cobertura de seu complemento. Além dos resultados apresentados, discutimos brevemente outras parametrizações naturais e estruturais, apontando direções para trabalhos futuros e perguntas em aberto.

2. Resultados

Nosso resultado estrutural principal deste trabalho limita o número de separadores minimais de um grafo em função da distância para clique: o número mínimo de vértices que devem ser removidos de G para que o restante seja um grafo completo. Este resultado pode ser de interesse independente para outros problemas que sejam tratáveis em grafos com número limitado de separadores minimais.

Lema 1. *Seja G um grafo com distância para clique no máximo d. Então G possui no máximo* $O(2^d n^2)$ *separadores minimais.*

Esboço da prova. Seja G um grafo e seja U um conjunto de vértices com $|U| \leq d$ tal que $G \setminus U$ é um grafo completo. É suficiente mostrar que para cada par de vértices $s, t \in V(G)$, existem no máximo $O(2^d)$ st-separadores minimais. Seja $\mathscr{S}$ a família de st-separadores minimais. Note que para qualquer $S \in \mathscr{S}$, temos $|S \cap U| \leq d$, portanto há no máximo 2^d interseções diferentes entre elementos de $\mathscr{S}$ e U. Por outro lado, uma vez fixado $X \subseteq U$, é possível mostrar que o número de separadores minimais $S \in \mathscr{S}$ tais que $S \cap U = X$ é limitado por uma constante. □

Utilizando o Lema 1 podemos provar nosso resultado principal sobre reconfiguração de separadores minimais.

Teorema 1. *O problema de reconfiguração de separadores sob k-TAR, parametrizado por distância para clique d, pode ser resolvido em tempo FPT.*

Esboço da prova. Seja I uma instância composta por um grafo G e por dois st-separadores A e B. Considere o grafo $\mathscr{G}$ tal que $V(\mathscr{G})$ é o conjunto de st-separadores minimais S satisfazendo $|S| \leq |A| = |B|$ e no qual dois vértices S_1 e S_2 são adjacentes se $|S_1 \cup S_2| \leq k$. Usando ideias similares ao Lema 10 de Gomes et al. (2020), é possível mostrar que existe uma reconfiguração de A em B se e somente se existem $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ tais que A' e B' são vértices de uma mesma componente conexa de $\mathscr{G}$. Como tal verificação pode ser feita em tempo polinomial no tamanho de $\mathscr{G}$ e como o tamanho de $\mathscr{G}$ é FPT em d, pelo Lema 1, o resultado segue. □

Utilizando o Teorema 5 de Gomes et al. (2020) é possível mostrar um resultado análogo para TJ.

Teorema 2. *O problema de reconfiguração de separadores sob TJ, parametrizado por distância para clique, pode ser resolvido em tempo FPT.*

3. Outras parametrizações e trabalhos futuros

Dois parâmetros naturais para problemas de reconfiguração são o tamanho k do objeto sendo reconfigurado e o comprimento ℓ da sequência de reconfiguração. Uma questão natural, a ser considerada em trabalhos futuros é a determinação da complexidade parametrizada do problema quando analisado sob cada um destes parâmetros ou mesmo por ambos. A seguinte proposição aponta para resultados positivos nesta direção.

Proposição 1. *O problema de reconfiguração de separadores sob TS ou TJ é* FPT, *parametrizado por $k + \ell + \Delta$, onde Δ é o grau máximo do grafo.*

Outra direção de pesquisa promissora é determinar quais outros parâmetros estruturais limitam a família de separadores minimais de um grafo a uma quantidade FPT, de maneira análoga àquela apresentada no Lema 1. Além de implicações quase imediatas no problema de reconfiguração de separadores, tais resultados poderiam também possibilitar avanços na complexidade parametrizada de outros problemas.

Referências

Bonamy M, Bousquet N (2014) Reconfiguring independent sets in cographs. arXiv preprint arXiv:14061433

Bonamy M, Johnson M, Lignos I, Patel V, Paulusma D (2012) Reconfiguration graphs for vertex colourings of chordal and chordal bipartite graphs. Journal of Combinatorial Optimization 27(1):132–143

Bonsma P, Cereceda L (2007) Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances. Lecture Notes in Computer Science p 738–749

Cereceda L, van den Heuvel J, Johnson M (2011) Finding paths between 3-colorings. J Graph Theory 67(1):69–82

Demaine ED, Demaine ML, Fox-Epstein E, Hoang DA, Ito T, Ono H, Otachi Y, Uehara R, Yamada T (2015) Linear-time algorithm for sliding tokens on trees. Theoretical Computer Science 600:132 – 142

Gharibian S, Sikora J (2015) Ground state connectivity of local hamiltonians. In: Halldórsson MM, Iwama K, Kobayashi N, Speckmann B (eds) Automata, Languages, and Programming, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp 617–628

Gomes G, Nogueira SH, Santos VFd (2020) Some results on vertex separator reconfiguration. arXiv preprint arXiv:200410873

Gopalan P, Kolaitis PG, Maneva EN, Papadimitriou CH (2006) The connectivity of boolean satisfiability: Computational and structural dichotomies. In: Bugliesi M, Preneel B, Sassone V, Wegener I (eds) Automata, Languages and Programming, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp 346–357

Hearn RA, Demaine ED (2005) PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation. Theoretical Computer Science 343(1-2):72–96

Ito T, Demaine ED, Harvey NJ, Papadimitriou CH, Sideri M, Uehara R, Uno Y (2011) On the complexity of reconfiguration problems. Theoretical Computer Science 412(12):1054 – 1065

Ito T, Kamiński M, Ono H, Suzuki A, Uehara R, Yamanaka K (2014) On the parameterized complexity for token jumping on graphs. Theory and Applications of Models of Computation p 341–351

Ito T, Ono H, Otachi Y (2015) Reconfiguration of cliques in a graph. In: Jain R, Jain S, Stephan F (eds) Theory and Applications of Models of Computation, Springer International Publishing, Cham, pp 212–223

Johnson WW, Story WE (1879) Notes on the "15"puzzle. American Journal of Mathematics 2(4):397–404

Kanj I, Xia G (2015) Flip distance is in FPT time $O(n + k \cdot c^k)$. In: 32nd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2015), Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik

Lokshtanov D, Mouawad AE (2018) The complexity of independent set reconfiguration on bipartite graphs. ACM Trans Algorithms 15(1), DOI 10.1145/3280825

Lubiw A, Pathak V (2015) Flip distance between two triangulations of a point set is NP-complete. Computational Geometry 49:17 – 23, 24th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'12)

Makino K, Tamaki S, Yamamoto M (2011) An exact algorithm for the boolean connectivity problem for k-CNF. Theoretical Computer Science 412(35):4613–4618

Mouawad AE, Nishimura N, Raman V, Wrochna M (2014) Reconfiguration over tree decompositions. Lecture Notes in Computer Science p 246–257

Mouawad AE, Nishimura N, Raman V, Simjour N, Suzuki A (2016) On the parameterized complexity of reconfiguration problems. Algorithmica 78(1):274–297