Eliminar Ciclos pela Remoção de um Emparelhamento Parametrizado pela Largura em Árvore é FPT*

Carlos V.G.C. Lima[1], **Thiago Marcilon**[1], **Cícero S. Morais**[1†]

[1]Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Brasil

{vinicius.lima,thiago.marcilon}@ufca.edu.br

samuel.santos@aluno.ufca.edu.br

Abstract. *Given a graph $G = (V, E)$, a decycling matching $M \subseteq E(G)$ of G is a matching whose removal eliminates all the cycles of G (i.e. $G - M$ is a forest). We study the problem of determining whether G admits a decycling matching. This problem is known to be* NP*-complete even for subcubic graphs. In this work we prove that it is* FPT *when parameterized by the treewidth.*

Resumo. *Dado um grafo $G = (V, E)$, um emparelhamento deciclante $M \subseteq E(G)$ de G é um emparelhamento cuja remoção elimina todos os ciclos de G (i.e. $G - M$ é uma floresta). Estudamos o problema de determinar se G admite um emparelhamento deciclante. Já é conhecido que este problema é* NP*-completo mesmo para grafos subcúbicos. Neste trabalho mostramos que ele está em* FPT *quando parametrizado pela largura em árvore.*

1. Introdução

Obter um grafo acíclico a partir de um grafo qualquer é um problema amplamente estudado, em especial quando se exige obter uma floresta geradora de peso mínimo. Consideramos uma versão ligeiramente diferente, onde restringimos o conjunto de arestas a ser removido de modo que seja um emparelhamento. Ou seja, neste trabalho consideramos o problema de decidir se um grafo $G = (V, E)$ admite um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ tal que $G - M$ é uma floresta. Dizemos que tal emparelhamento M é um *emparelhamento deciclante* de G. Denominamos tal problema como EMPARELHAMENTO DECICLANTE.

[Lima et al. 2017] mostraram que este problema é NP-completo, mesmo para grafos planares subcúbicos, grafos com grau máximo no máximo 3, 2-conexos. Por outro lado, os autores mostram que o problema é solucionável em tempo polinomial para grafos livres de garra ($K_{1,3}$) e pata ($K_{1,3} + e$); grafos livres de P_5; grafos cordais; e grafos distância-hereditários livres de C_4. [Lima et al. 2017] também observaram que uma condição necessária, mas não suficiente, para um grafo G admitir um emparelhamento deciclante é que $|E(H)| < \lfloor \frac{3}{2}|V(H)| \rfloor$, para todo subgrafo H de G. Além disso, se G for subcúbico e conexo, G possui um emparelhamento deciclante se e somente se G possui uma árvore geradora T onde todas as suas folhas possuem grau menor ou igual a 2 em G.

[Protti and Souza 2018] se perguntaram se existe alguma classe de grafos em que ser esparso é equivalente a possuir um emparelhamento deciclante. Eles então caracterizaram os grafos cordais e distância-hereditários que possuem emparelhamentos deciclantes, levando a algoritmos lineares de reconhecimento destes grafos. Como consequência,

*Este trabalho tem o apoio do projeto CNPq Universal [422912/2021-2].

†Bolsista PIBIC/CNPq, EDITAL 04/2022/PRPI/UFCA - CHAMADA PIICT UFCA/FUNCAP/CNPQ.

eles mostraram que também é possível reconhecer grafos *split* e cografos que possuem um emparelhamento deciclante. Como resultados negativos mostraram que EMPARELHAMENTO DECICLANTE é NP-completo mesmo para grafos subcúbicos Hamiltonianos com exatamente dois vértices de grau 2.

Neste trabalho mostramos que EMPARELHAMENTO DECICLANTE é FPT quando parametrizado pela largura em árvore. O algoritmo consiste no uso da técnica bastante difundida de programação dinâmica através da decomposição em árvore boa do grafo de entrada. Até o conhecimento dos autores, este é o primeiro resultado sobre o problema do ponto de vista da complexidade parametrizada.

2. Definições e Algoritmo FPT

Para noções e notações básicas sobre Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional (Parametrizada), referenciamos ao leitor os seguintes livros [Bondy and Murty 2008, Garey and Johnson 1979, Cygan et al. 2015, Fomin et al. 2019].

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto $S \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido por* S de G, $G[S]$, é o subgrafo $H = G[S]$ de G, tal que $V(H) = S$ e $E(H) = \{uv \,|\, u, v \in S \text{ e } uv \in E(G)\}$. Além disso, dado um subconjunto $M \subseteq E(G)$, seja $G[M]$ o subgrafo H de G *induzido pelas arestas* de M, tal que $V(H) = \{v \,|\, uv \in M\}$ e $E(H) = M$. Para um subconjunto $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G - S$ o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices de S e todas as arestas incidentes aos vértices de S em G. Para $M \subseteq E(G)$, denotamos por $G - M$ o subgrafo obtido pela remoção de M.

Uma *decomposição em árvore* de um grafo $G = (V, E)$ é um par $\mathcal{T} = (X, T)$, tal que $T = (I, F)$ é uma árvore e $X = \{X_i \mid i \in I\}$, onde cada nó $i \in I$ de T tem associado a si um subconjunto de vértices $X_i \subseteq V(G)$, chamado de *sacola* de i, tal que:

1. Cada vértice de G pertence a pelo menos uma sacola: $\bigcup_{i \in I} X_i = V(G)$;
2. Para todo $vw \in E(G)$, existe $i \in I$ tal que $v, w \in X_i$;
3. Para todo $v \in V(G)$, o conjunto $\{i \in I \,|\, v \in X_i\}$ induz uma sub-árvore de T.

Uma decomposição em árvore $\mathcal{T} = (X, T)$ é dita *boa* [Kloks 1994] se T é uma árvore enraizada em um nó r e todo nó i é de um dos seguintes tipos:

- Nó folha: não possui filhos e $|X_i| = 1$;
- Nó introduz: possui exatamente um filho j, de forma que $X_i = X_j \cup \{v\}$ para algum vértice $v \notin X_j$;
- Nó esquece: possui exatamente um filho j, de forma que $X_i = X_j \setminus \{v\}$ para algum vértice $v \in X_j$;
- Nó junção: possui exatamente dois filhos j, k, de forma que $X_i = X_j = X_k$.

Dada uma decomposição em árvore $\mathcal{T} = (X, T)$, a *largura* de $\mathcal{T}$ é definida como $w(\mathcal{T}) = \max_{i \in I} |X_i| - 1$. A *largura em árvore* de G, denotada por $tw(G)$, é a menor largura de uma decomposição em árvore de G.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $\mathcal{T} = (X, T)$ uma decomposição em árvore boa de G. Para cada $i \in V(T)$, seja G_i o subgrafo de G induzido pela união de X_i com as sacolas dos descendentes de i e $N_i(v) = N_{G[X_i]}(v)$, ou seja, a vizinhança de v em $G[X_i]$.

Para $i \in V(T)$, $W \subseteq X_i$, $S \subseteq E(G[X_i])$ e $\mathcal{P}$ uma partição de X_i, seja $T_i[S, \mathcal{P}, W] =$ VERDADEIRO se e somente se existe um emparelhamento deciclante M

de G_i, tal que $W = X_i \cap V(G[M])$, ou seja, W consiste dos vértices extremos de M que pertencem a X_i, $S = M \cap E(G[X_i])$, ou seja, S consiste das arestas de M os quais ambos vértices extremos pertencem a X_i, e dois vértices de X_i estão em um mesmo conjunto em $\mathcal{P}$ se e somente se eles estão na mesma componente conexa do grafo $G_i - M$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é *i-consistente com* S se, para todo $xy \in E(G[X_i]) \setminus S$, x, y pertencem a um mesmo conjunto em $\mathcal{P}$. Dizemos que W é *i-consistente com* S se $V(G[S]) \subseteq W$. Note que, se $\mathcal{P}$ ou W não são i-consistentes com S ou S não é um emparelhamento deciclante de $G[X_i]$, então $T_i[S, \mathcal{P}, W] = $ FALSO.

Lema 1 (Nó folha)**.** *Seja i um nó folha de T, tal que $X_i = \{v\}$. Temos que $T_i[\varnothing, \{\{v\}\}, \varnothing] = $ VERDADEIRO.*

Demonstração. Veja que G_i é um grafo vazio que possui apenas o vértice v. Logo, G_i é uma floresta e o único subconjunto de arestas de $G[X_i]$ possível é $\varnothing$. Assim, só temos um índice para T_i, que é $(\varnothing, \{\{v\}\}, \varnothing)$, e $T_i[\varnothing, \{\{v\}\}, \varnothing] = $ VERDADEIRO. □

Para uma partição $\mathcal{P}$ de uma sacola X_i e um vértice $x \in X_i$, seja $C(\mathcal{P}, x)$ o conjunto de $\mathcal{P}$ que contém x. Para um nó *introduz* i de T com filho i', onde $X_i = X_{i'} \cup \{v\}$ e $S \subseteq E(G[X_i])$, seja $N_i^S = \{v\} \cup \{u \in N_i(v) \mid uv \in S\}$, $\overline{N_i^S} = N_i(v) \setminus N_i^S$ e $P_i(S, \mathcal{P})$ o conjunto de partições $\mathcal{P}'$ de $X_{i'}$ i'-consistentes com S, tais que $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{C(\mathcal{P}, v)\}) \cup \mathcal{X}$, onde $\mathcal{X}$ é uma partição de $C(\mathcal{P}, v) \setminus \{v\}$, $C(\mathcal{X}, x) \neq C(\mathcal{X}, y)$ para quaisquer dois vértices $x, y \in \overline{N_i^S}$, e $|\mathcal{X}| = |\overline{N_i^S}|$.

Lema 2 (Nó introduz)**.** *Sejam i um nó introduz de T com filho i', onde $X_i = X_{i'} \cup \{v\}$, $S \subseteq E(G[X_i])$ um emparelhamento deciclante de $G[X_i]$, $\mathcal{P}$ uma partição de X_i i-consistente com S e W um subconjunto de X_i i-consistente com S. Temos que:*

$$T_i[S, \mathcal{P}, W] = \bigvee_{\mathcal{P}' \in P_i(S \setminus E(G[N_i^S]), \mathcal{P})} T_{i'}[S \setminus E(G[N_i^S]), \mathcal{P}', W \setminus N_i^S].$$

A prova do nó introduz parte da ideia de que a diferença entre G_i e $G_{i'}$ é apenas o vértice v e as arestas incidentes a ele. Desta forma, dado um emparelhamento deciclante M de G_i, podemos obter um possível emparelhamento deciclante M' de $G_{i'}$ removendo de M a aresta incidente a v, se tal aresta existir. No sentido contrário, podemos obter um possível emparelhamento deciclante M de G_i a partir de M' adicionando a M' nenhuma aresta ou a aresta uv, para algum $u \in N_i(v)$. A ideia central da prova vem na maneira de calcular a partição $\mathcal{P}'$. Devido à introdução do vértice v, pode ocorrer de duas ou mais componentes de $G_{i'} - M'$ se unirem em uma só componente de $G_i - M$. Olhando no sentido inverso, ao remover v, a componente de $G_i - M$ a que v pertencia pode se dividir em novas componentes de $G_{i'} - M'$. Desta forma, sendo $C(\mathcal{P}, v)$ a componente de $G_i - M$ a que v pertencia, que existe uma partição $\mathcal{X}$ de $C(\mathcal{P}, v)$ cuja união com $\mathcal{P} \setminus C(\mathcal{P}, v)$ resulta em uma partição válida $\mathcal{P}'$ de X_i' que é compatível com $G_{i'} - M'$.

Seja i um nó *esquece* com filho i', onde $X_i = X_{i'} \setminus \{v\}$. Defina $E_i(S, \mathcal{P})$ como sendo o conjunto de partições de X_i, i-consistentes com S, digamos uma partição $\mathcal{P}'$, tal que obtemos $\mathcal{P}'$ adicionando o vértice v a exatamente um conjunto de $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$.

Lema 3 (Nó esquece). *Sejam i um nó esquece de T com filho i', onde $X_i = X_{i'} \setminus \{v\}$, $S \subseteq E(G[X_i])$ um emparelhamento deciclante de $G[X_i]$, $\mathcal{P}$ uma partição de X_i i-consistente com S e W um subconjunto de X_i i-consistente com S. Temos que:*

$$T_i[S, \mathcal{P}, W] = \bigvee_{\substack{u \in N_{i'}(v) \\ \mathcal{P}' \in E_i(S \cup \{uv\}, \mathcal{P})}} T_{i'}[S \cup \{uv\}, \mathcal{P}', W \cup \{v\}] \vee \bigvee_{\mathcal{P}' \in E_i(S, \mathcal{P})} T_{i'}[S, \mathcal{P}', W] \vee T_{i'}[S, \mathcal{P}', W \cup \{v\}].$$

A prova segue de duas ideias principais. Primeiro, veja que $G_i = G_{i'}$, portanto, se existe um emparelhamento deciclante M de G_i, então é claro que existe um emparelhamento deciclante $M' = M$ de $G_{i'}$ e vice-versa. Segundo, como as componentes de $G_i - M$ e $G_{i'} - M'$ são iguais, o vértice v pertence a um conjunto da partição $\mathcal{P}'$ de $X_{i'}$ que pode ser obtida adicionando-se v a exatamente um conjunto de $\mathcal{P}$. Da mesma forma, podemos obter $\mathcal{P}$ a partir de $\mathcal{P}'$ simplesmente removendo v do conjunto ao qual ele pertence em $\mathcal{P}$. Por fim, consideramos os casos em que v está saturado em $M = M'$ por uma aresta em $G[X_{i'}]$; ou v está saturado em M por uma aresta fora de $G[X_{i'}]$; ou v não está saturado em M.

Seja X_i uma sacola e $S \subseteq E(G[X_i])$. Para um par de partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de X_i i-consistentes com S de X_i e um par de vértices $x, y \in X_i$, dizemos que existe um S-*caminho* de x para y em $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ se e somente se existe uma sequência de vértices $x = v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = y$ em X_i, tal que, para todo $1 \leq i < k$, os vértices v_i e v_{i+1} estão no mesmo conjunto em exatamente uma das duas partições $\mathcal{P}_1$ ou $\mathcal{P}_2$, exceto quando $v_i v_{i+1} \in E(G[X_i]) \setminus S$, caso no qual eles estão no mesmo conjunto em ambas as partições.

Finalmente, para os nós do tipo junção, definimos $J_i(S, \mathcal{P})$ como o conjunto de pares de partições $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ de X_i i-consistentes com S, tais que, para todo x e y em um mesmo conjunto em $\mathcal{P}$, existe exatamente um S-caminho de x para y em $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Definimos $K_i(S, W)$ como o conjunto de pares de subconjuntos (W_1, W_2) de X_i i-consistentes com S, tais que $W_1 \cap W_2 = V(G[S])$ e $W_1 \cup W_2 = W$.

Lema 4 (Nó junção). *Sejam i um nó junção de T com filhos i_1 e i_2, onde $X_i = X_{i_1} = X_{i_2}$, $S \subseteq E(G[X_i])$ um emparelhamento deciclante de $G[X_i]$, $\mathcal{P}$ uma partição de X_i i-consistente com S e W um subconjunto de X_i i-consistente com S. Temos que*

$$T_i[S, \mathcal{P}, W] = \bigvee_{(W_1, W_2) \in K_i(S, W)} \bigvee_{(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \in J_i(S, \mathcal{P})} T_{i_1}[S, \mathcal{P}_1, W_1] \wedge T_{i_2}[S, \mathcal{P}_2, W_2].$$

Teorema 5. EMPARELHAMENTO DECICLANTE *parametrizado pela largura em árvore $tw(G)$ de um grafo G pode ser resolvido em tempo $O(2^{O(tw(G))} \cdot tw(G)^{O(tw(G))} \cdot n)$.*

A computação mais onerosa é a do nó junção. Nele, precisamos calcular pares de partições. Para cada sacola, temos $O(w^w)$ partições possíveis e $O(w^{2w})$ pares de partições. Para cada par de partições, nós precisamos verificar se existe um S-caminho entre cada par de vértices. Temos $O(w^2)$ pares de vértices e $O(2^{O(w)})$ caminhos possíveis entre cada par de vértices. Como a decomposição em árvore possui $O(n)$ nós e assumindo que ela é uma decomposição ótima, obtemos uma complexidade final de $O(2^{O(tw(G))} \cdot tw(G)^{O(tw(G))} \cdot n)$, onde $n = |V(G)|$ e $w = tw(G)$, na decomposição ótima.

Referências

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London.

Cygan, M., Fomin, F. V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., and Saurabh, S. (2015). *Parameterized Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.

Fomin, F. V., Lokshtanov, D., Saurabh, S., and Zehavi, M. (2019). *Kernelization: Theory of Parameterized Preprocessing*. Cambridge University Press.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.

Kloks, T. (1994). *Treewidth: computations and approximations*. Springer.

Lima, C. V., Rautenbach, D., Souza, U. S., and Szwarcfiter, J. L. (2017). Decycling with a matching. *Information Processing Letters*, 124:26–29.

Protti, F. and Souza, U. S. (2018). Decycling a graph by the removal of a matching: new algorithmic and structural aspects in some classes of graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 20 no. 2.