O Problema do Caminho Positivo Mínimo

Felipe Albuquerque [1,2], Manoel Campêlo[1], Tatiane Figueiredo[2]

[1] ParGO, Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC)

[2]NEMO, Departamento de Computação – Universidade Federal do Ceará (Campus Russas)

felipealb@alu.ufc.br, mcampelo@lia.ufc.br, tatianefernandes@ufc.br

Abstract. *Signed graphs are graphs where each edge/arc is assigned a positive or negative label. A path is positive if it has an even number of negative edges/arcs. We present polynomial time algorithms for finding a minimum weight positive path in undirected signed graphs. We show that the problem becomes NP-hard in signed digraphs even for unit weights.*

Resumo. *Grafos de sinais são grafos onde a cada aresta/arco é associado um rótulo positivo ou negativo. Um caminho é positivo se contém um número par de arestas/arcos negativos. Apresentamos algoritmos polinomiais para encontrar um caminho positivo de peso mínimo em grafos de sinais não direcionados. Mostramos que o problema se torna NP-Difícil em digrafos de sinais, mesmo com pesos unitários.*

1. Introdução

Seja $G = (V, E^+ \cup E^-)$ um grafo de sinais, onde V é o conjunto de vértices, E^+ e E^- são os conjuntos de arestas (ou arcos) positivas e negativas, respectivamente. Dado um subgrafo H em G, seja $E^+(H)$ (resp. $E^-(H)$) o conjunto de arestas de H em E^+ (resp. E^-). O sinal de H é o produto dos sinais de suas arestas, quer dizer, H é positivo (resp. negativo) se $|E^-(H)|$ é par (resp. ímpar). Denote por $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) o conjunto de todos os caminhos positivos (resp. negativos) em G.

Considere uma função de pesos $w : E^+ \cup E^- \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida sobre as arestas. Seja $w(P)$ o peso de um caminho P em G. Dados $u, v \in V$, seja $\delta_+(u, v)$ (resp. $\delta_-(u, v)$) o menor peso de um caminho positivo (resp. negativo) entre u e v. Esse valor é $+\infty$, caso tal caminho não exista. Quando os pesos são unitários, $\delta_+(u, v)$ (resp. $\delta_-(u, v)$) é tamanho do menor caminho positivo (resp. negativo) entre u e v. Caminhos positivos de tamanho mínimo foram usados para definir relações de compatibilidade entre indivíduos para pertencerem a uma mesma equipe de trabalho [Kouvatis et al. 2020, Albuquerque et al. 2022]. Tais noções de compatibilidade se baseiam na teoria do balanço social [Heider 1946, Cartwright and Harary 1956].

Estudamos aqui os problemas de determinar um menor caminho positivo em G e um caminho positivo de peso mínimo em G. Apresentamos algoritmos polinomiais para ambos os problemas. Consideramos na Seção 2 o caso em que G não possui ciclos negativos; na Seção 3, abordamos o caso geral. Adicionalmente, na Seção 4, mostramos que a versão destes problemas para digrafos é NP-Difícil. Vale observar que os problemas com respeito a caminhos negativos são equivalentes aos correspondentes para caminhos positivos.

2. Algoritmo para grafos balanceados

Um grafo de sinais não direcionado G é dito *balanceado* se não contém ciclo com número ímpar de arestas negativas [Cartwright and Harary 1956]. Nesta seção, admita que G é balanceado. Mostramos que a adaptação do algoritmo de Dijkstra mostrada no Algoritmo 1 resolve o problema de encontrar um caminho positivo de peso mínimo. Esse algoritmo é uma reescrita do procedimento apresentado em [Guler et al. 2014]. Abaixo, provamos sua corretude, não exibida em [Guler et al. 2014, Guler et al. 2015]. No que segue, dado $\sigma \in \{-,+\}$, denotamos por $\bar{\sigma}$ o sinal complementar, ou seja, $\{\sigma, \bar{\sigma}\} = \{-,+\}$.

Data: $G = (V, E^+ \cup E^-)$, $s \in V$, $w : E^+ \cup E^- \to \mathbb{R}_+$
Result: Menores pesos $d_+(v)$ de caminho positivo entre s e cada $v \in V$

1 $d_+(v) = d_-(v) = +\infty \;\; \forall v \in V$;
2 $k = 0$ `/* Marcador de iteração */`
3 $d_+(s) = 0, d_-(s) = +\infty$;
4 $d_\sigma(v) = w_{sv} \;\; \forall \sigma \in \{-,+\} \;\; \forall v \in V : (s,v) \in E^\sigma$;
5 $R_+ = R_- = \{s\}$;
6 **while** $R_+ \neq V$ **do**
7     $k = k + 1$;
8     $\epsilon_\sigma = \inf\{d_\sigma(u) : u \in V \setminus R_\sigma\} \;\; \forall \sigma \in \{-,+\}$;
9   **if** $(\epsilon_+ \neq +\infty) \,\|\, (\epsilon_- \neq +\infty)$ **then**
10   Seja $\sigma \in \{-,+\}$ tal que $\epsilon_\sigma = \min\{\epsilon_-, \epsilon_+\}$;
11   Seja $u \in V \setminus R_\sigma$ tal que $d_\sigma(u) = \epsilon_\sigma$;
12         $R_\sigma = R_\sigma \cup \{u\}$;
13         $d_\sigma(v) = \min\{d_\sigma(v), d_\sigma(u) + w_{uv}\} \; \forall v \in V \setminus R_\sigma : (u,v) \in E^+$;
14         $d_{\bar{\sigma}}(v) = \min\{d_{\bar{\sigma}}(v), d_\sigma(u) + w_{uv}\} \; \forall v \in V \setminus R_{\bar{\sigma}} : (u,v) \in E^-$;
15   **else**
16         $R_+ = V, R_- = V$;
17   **end**
18 **end**

Algorithm 1: Algoritmo para o caminho positivo mínimo.

Lema 1. *Em cada iteração k do algoritmo, para todo $\sigma \in \{-,+\}$ e todo $v \in V$, se $d_\sigma(v) < \infty$ então existe caminho em $\mathcal{P}^\sigma$ entre s e v.*

Indução sobre k. Para $k = 0$, o resultado é trivial. Suponha-o verdadeiro até a iteração $k-1$. Na iteração k, é suficiente considerar $\varsigma \in \{-,+\}$ e $v \in V$ tais que $d_\varsigma(v)$ tornou-se finito. Isso ocorre no passo 13 com $\varsigma = \sigma$ ou no passo 14 com $\varsigma = \bar{\sigma}$. Devemos mostrar que existe caminho em $\mathcal{P}^\varsigma$ entre s e v. Em ambos os casos, temos que $d_\varsigma(v)$ era infinito e torna-se $d_\sigma(u) + w_{uv} < +\infty$ nesta iteração. Assim, pela hipótese indutiva aplicada a u, existe caminho P_{su} em $\mathcal{P}^\sigma$ entre s e u.

Primeiro, suponha que $v \in V(P_{su})$. Sejam P_{sv} e P_{vu} os dois subcaminhos de P_{su}. Então, $P_{vu} = (v,u)$ ou P_{vu} junto com (u,v) formam um ciclo (positivo). Logo, P_{vu} tem o mesmo sinal da aresta (u,v). Se $\varsigma = \sigma$, então $(u,v) \in E^+$ e, assim, $P_{vu} \in \mathcal{P}^+$. Logo, P_{su} e P_{sv} têm a mesma paridade de arestas negativas, ou seja, $P_{sv} \in \mathcal{P}^\sigma = \mathcal{P}^\varsigma$. Caso $\varsigma = \bar{\sigma}$, então $(u,v) \in E^-$ e, portanto, $P_{vu} \in \mathcal{P}^-$. Logo, P_{su} e P_{sv} têm paridades diferentes de arestas negativas, ou melhor, $P_{sv} \in \mathcal{P}^{\bar{\sigma}} = \mathcal{P}^\varsigma$. Admita agora que $v \notin V(P_{su})$, ou seja, que $E(P_{su}) \cup \{(u,v)\}$ induz um caminho P_{sv} entre s e v. Se $(u,v) \in E^+$, ou ainda, $\varsigma = \sigma$, então $P_{sv} \in \mathcal{P}^\sigma = \mathcal{P}^\varsigma$. Se $(u,v) \in E^-$, isto é, $\varsigma = \bar{\sigma}$, então $P_{sv} \in \mathcal{P}^{\bar{\sigma}} = \mathcal{P}^\varsigma$. $\square$

Proposição 1. *Em cada iteração do algoritmo, temos $d_\sigma(v) = \delta_\sigma(s,v)$, para todo $\sigma \in \{-,+\}$ e todo $v \in R_\sigma$. Como $R_+ = V$ ao final do algoritmo, sua corretude segue.*

Demonstração. Primeiro observe que $d_\sigma(v)$, para cada $\sigma \in \{-,+\}$ e $v \in V$, é não crescente ao longo das iterações e, tão logo v entre em R_σ, esse valor permanece inalterado. Vamos chamar essa propriedade de PNC – Propriedade Não Crescente.

A prova será por indução sobre o número k da iteração. Para $k = 0$, temos $R_+ = R_- = \{s\}$ e, trivialmente, $d_+(s) = 0$, $d_-(s) = \infty$. Ver linhas 3 e 5. Suponha que o resultado vale até a iteração $k-1$. Considere agora a iteração $k \geq 1$. Por PNC, é suficiente considerar o vértice u adicionado a R_σ, $\sigma \in \{-,+\}$, nesta iteração. Note que $u \neq s$. Por conveniência, defina R'_- e R'_+ os conjuntos R_- e R_+ na iteração $k-1$.

Se não existe caminho em $\mathcal{P}^\sigma$ entre s e u, então $d_\sigma(u) = +\infty$ pelo Lema 1. Portanto, $d_\sigma(u) = \delta_\sigma(s,u)$. Admita, então, que existe caminho de $\mathcal{P}^\sigma$ entre s e u. Seja P um de peso mínimo, ou seja, $w(P) = \delta_\sigma(s,u)$. Para todo vértice v de P, denote por P_v o subcaminho de P entre s e v. Seja x o vértice de P, mais longe de s nesse caminho, tal que $P_x \in \mathcal{P}^\varsigma$ e $x \in R'_\varsigma$, para algum $\varsigma \in \{-,+\}$. Tal vértice existe pois $P_s \in \mathcal{P}^+$ e $s \in R'_+$. Além disso, $x \neq u$, pois $P_u = P \in \mathcal{P}^\sigma$ e $u \notin R'_\sigma$, implicando $P_u \notin \mathcal{P}^\varsigma$ ou $u \notin R'_\varsigma$, para todo $\varsigma \in \{-,+\}$. Por conseguinte, $w(P) \geq w(P_x)$. Como $P_x \in \mathcal{P}^\varsigma$ e $x \in R'_\varsigma$, podemos aplicar a hipótese de indução para obter $w(P_x) \geq \delta_\varsigma(s,x) = d_\varsigma(x)$ e, portanto, $w(P) \geq d_\varsigma(x)$.

Seja y o vértice seguinte a x em P. Assuma que $xy \in E^+$ (o caso $xy \in E^-$ é similar). Então, $P_y \in \mathcal{P}^\varsigma$. Como y *não* satisfaz $P_y \in \mathcal{P}^\varsigma$ e $y \in R'_\varsigma$ (pois x é o vértice mais longe de s), concluímos que $y \in V \setminus R'_\varsigma$. Assim, quando x entra em R_ς (linha 12), então $d_\varsigma(y)$ é atualizado na linha 13, de modo que $d_\varsigma(x) \geq d_\varsigma(y)$. E essa desigualdade se mantém pela propriedade PNC. Finalmente, como u é escolhido para entrar em R_σ quando $y \in V \setminus R'_\varsigma$ também é candidato, temos que pelas linhas 8, 10 e 11 que $d_\varsigma(y) \geq d_\sigma(u)$. Logo, $d_\varsigma(x) \geq d_\sigma(u)$. Chegamos portanto a $\delta_\sigma(s,u) = w(P) \geq d_\sigma(u)$, ou melhor, $d_\sigma(u) = \delta_\sigma(s,u)$. □

3. Algoritmo para grafos não direcionados

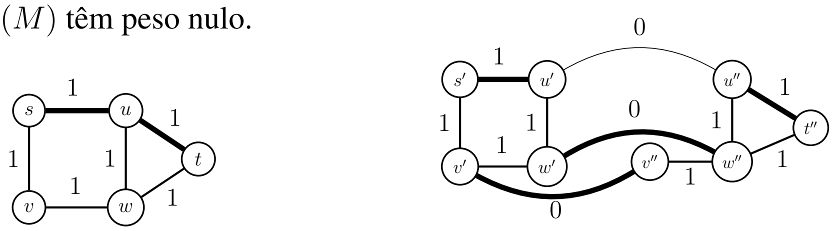
Nesta seção admita que G é não direcionado, podendo ter ciclos negativos. Defina o grafo *par* de G como o grafo G_p obtido dividindo cada aresta positiva de G em duas arestas. Precisamente, $V(G_p) = V(G) \cup \{v_e : e \in E^+(G)\}$ e $E(G_p) = E^-(G) \cup \{(u, v_e), (v_e, v) : e = uv \in E^+(G)\}$. Além disso, G_p é ponderado em arestas, sendo w_e o peso de cada aresta $e \in E^-(G)$ e $w_e/2$ o peso das arestas (u, v_e) e (v_e, v) para todo $e \in E^+(G)$. Dados $u, v \in V(G)$, existe uma correspondência biunívoca entre os uv-caminhos em G e G_p. Note que a paridade de um uv-caminho em G_p é a paridade do número de arestas negativas no uv-caminho correspondente em G. Além disso, o peso do primeiro caminho é igual ao peso do segundo. Esses fatos levam à seguinte equivalência:

Proposição 2. *Determinar um st-caminho positivo de comprimento mínimo em G equivale a determinar um st-caminho par de peso mínimo em G_p.*

A partir da Prop. 2, mostramos a seguir que o problema em grafos não direcionados equivale a determinar um emparelhamento perfeito de peso mínimo, sendo portanto polinomial [Edmonds 1965a, Edmonds 1965b]. Para isso, considere um grafo H não direcionado, ponderado em arestas por $\omega : E(H) \to \mathbb{R}_+$, e dois vértices s e t de H. Para definir um st-caminho par de peso mínimo em H, vamos usar um grafo auxiliar H' construído a partir de uma cópia de $H - s$, uma cópia de $H - t$ e arestas ligando os vértices correspondentes nas cópias. Precisamente, $V(H') = V' \cup V''$ e $E(H') = E' \cup E'' \cup \bar{E}$, onde $V' = \{v' : v \in V(H{-}t)\}$, $V'' = \{v'' : v \in V(H{-}s)\}$, $\bar{E} = \{(u', u'') : u \in V(H{-}\{s,t\})\}$, $E' = \{(u', v') : (u,v) \in E(H), u, v \neq t\}$, $E'' = \{(u'', v'') : (u,v) \in E(H), u, v \neq s\}$. O peso das arestas $(u', v') \in E'$ ou $(u'', v'') \in E''$ é ω_{uv}, o mesmo da aresta equivalente (u, v) de H. As arestas $(u', u'') \in \bar{E}$ tem peso zero. A Figura 1 mostra uma ilustração.

Proposição 3 ([Lapaugh and Papadimitriou 1984])**.** *Um st-caminho par de peso mínimo em H é dado por um emparelhamento perfeito de peso mínimo em H', e vice-versa.*

Demonstração. É suficiente mostrar que todo st-caminho par em H corresponde a um emparelhamento perfeito em H' de mesmo peso, e vice-versa. Primeiro, seja $P = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_{2p} = t \rangle$, $p \geq 1$, um st-caminho par em H com peso $\omega(P) = \sum_{i=0}^{2p-1} \omega_{v_i v_{i+1}}$. Defina $M = \{(v'_{2i}, v'_{2i+1}) : i = 0, \ldots, p-1\} \cup \{(v''_{2i-1}, v''_{2i}) : i = 1, \ldots, p\} \cup \{(v', v'') : v \in V(H) \setminus V(P)\}$. Observe que M é um conjunto de arestas disjuntas que cobrem todos os vértices de H'. Logo, M é um emparelhamento perfeito em H'. Além disso, tem peso $\omega(M) = \sum_{i=0}^{p-1} \omega_{v'_{2i} v'_{2i+1}} + \sum_{i=1}^{p} \omega_{v''_{2i-1} v''_{2i}} = \sum_{i=0}^{2p-1} \omega_{v_i v_{i+1}}$, igual ao peso de P. Agora, seja M um emparelhamento perfeito em H' com peso $\omega(M)$. Sejam $E'(M)$, $E''(M)$ e $\bar{E}(M)$ as arestas de M que pertencem a E', E'' e $\bar{E}$, respectivamente. Podemos mostrar que $E'(M) \cup E''(M)$ induz um st-caminho P em H. Além disso, $w(P) = w(M)$ pois as arestas em $\bar{E}(M)$ têm peso nulo. $\square$



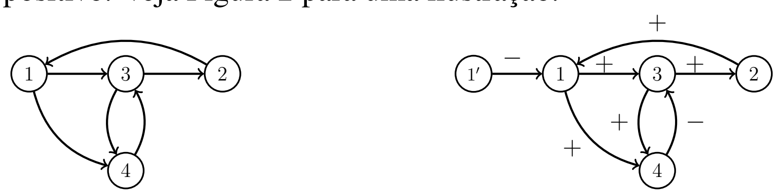
(a) Grafo H e vértices s e t (b) Grafo auxiliar H'

Figura 1. Ilustração do grafo auxiliar H'. Arestas em negrito ilustram a Prop. 3.

4. NP-Completude em digrafos

Dados um digrafo D e vértices distintos s, t, m de D, decidir se existe um st-caminho em D tendo m com vértice intermediário é NP-Completo [Fortune et al. 1980]. Vamos reduzir tal problema para aquele de decidir se existe um st-caminho positivo em um digrafo de sinais. Dado que este problema está em NP, mostramos sua NP-Completude.

Dados D e $s, t, m \in V(D)$, construímos um digrafo de sinais $G = (V(G), A(G))$ tal que $V(G) = V(D) \cup \{s'\}$ e $A(G) = A(D) \cup \{(s', s)\}$. Os arcos da forma $(m, v)\ \forall v \in V(G)$ e (s', s) têm sinal negativo; todos os outros arcos, $(u, v) \in A(G) : u \neq m, u \neq s'$, possuem sinal positivo. Veja Figura 2 para uma ilustração.



(a) Digrafo D, $(s, t, m) = (1, 2, 4)$ (b) Digrafo de sinais G, $(s', t) = (1', 2)$

Figura 2. Ilustração da redução.

Proposição 4. *Existe st-caminho passando por m em D se, e somente se, existe $s't$-caminho positivo em G.*

Demonstração. Perceba que, no digrafo de sinais G, o primeiro arco de um s', t-caminho é (s', s), com sinal negativo. Com isso, todo s', t-caminho positivo deve passar por m para ter uma quantidade par de arestas negativas. Por outro lado, removendo o vértice s' de um s', t-caminho positivo temos um s, t-caminho passando por m no digrafo D. $\square$

Referências

Albuquerque, F., Campêlo, M., and Figueiredo, T. (2022). O problema de formação de equipes com caminhos mínimos compatíveis: uma abordagem exata. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 54(152933):2965–1476.

Cartwright, D. and Harary, F. (1956). Structural balance: a generalization of heider's theory. *Psychological Review*, 63(5):277–293.

Edmonds, J. (1965a). Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices. *Journal of research of the National Bureau of Standards B*, 69(125-130):55–56.

Edmonds, J. (1965b). Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics*, 17:449–467.

Fortune, S., Hopcroft, J., and Wyllie, J. (1980). The directed subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 10(2):111–121.

Guler, B., Varan, B., Tutuncuoglu, K., Nafea, M., Zewail, A. A., Yener, A., and Octeau, D. (2014). Optimal strategies for targeted influence in signed networks. In *IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM 2014)*, pages 906–911.

Guler, B., Varan, B., Tutuncuoglu, K., Nafea, M., Zewail, A. A., Yener, A., and Octeau, D. (2015). Using social sensors for influence propagation in networks with positive and negative relationships. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 9(2):360–373.

Heider, F. (1946). Attitudes and cognitive organization. *The Journal of psychology*, 21(1):107–112.

Kouvatis, I., Semertzidis, K., Zerva, M., Pitoura, E., and Tsaparas, P. (2020). Forming compatible teams in signed networks. In *Proceedings of the 23rd International Conference on Extending Database Technology (EDBT)*, pages 363–366. OpenProceedings.org.

Lapaugh, A. S. and Papadimitriou, C. H. (1984). The even-path problem for graphs and digraphs. *Networks*, 14(4):507–513.