Estratégias Vencedoras e Complexidade de Jogos de Convexidade em Grafos

Samuel N. Araújo[1,2]**, Raquel Folz**[3]**, Rosiane de Freitas**[3]**,**
João Marcos Brito[2]**, Rudini Sampaio**[2]

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Crato, Brasil

[2]Dept Computação, Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, Brasil

[3]Instituto de Computação, Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Brasil

{raquel.folz,rosiane}@icomp.ufam.edu.br, samuel.araujo@ifce.edu.br, rudini@dc.ufc.br

Abstract. *Accordingly to Duchet (1987), the 1st paper of convexity on general graphs is the 1981 paper "Convexity in graphs". One of its authors, F. Harary, introduced in 1984 the first graph convexity games, on the geodesic convexity, investigated in a sequence of 5 papers that ended in 2003. In this paper, we extend them to other graph convexities, and obtain winning strategies for general convex geometries and the 1st PSPACE-hardness results on convexity games.*

Resumo. *Segundo Duchet (1987), o primeiro artigo de convexidade em grafos gerais é o artigo de 1981 "Convexity in graphs". Um dos autores, Frank Harary, introduziu em 1984 os primeiros jogos de convexidade em grafos, na convexidade geodésica, investigados numa sequência de 5 artigos que terminou em 2003. Neste artigo, estendemos esses jogos para outras convexidades e obtemos estratégias vencedoras para geometrias convexas gerais, bem como os primeiros resultados de complexidade PSPACE em jogos de convexidade.*

1. Jogos de Convexidade: Definições

[Harary 1984] introduziu os primeiros jogos de convexidade em grafos, na convexidade geodésica[1]. Uma *convexidade* $\mathcal{C}$ em V é uma família de subconjuntos de V, denominados *$\mathcal{C}$-convexos*, tal que $\emptyset, V \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada sob interseção. O *fecho $\mathcal{C}$-convexo* de $S \subseteq V$ é o menor conjunto $\mathcal{C}$-convexo $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S) \supseteq S$. A *função de intervalo* $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é tal que $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = S$ se e só se S é $\mathcal{C}$-convexo. Por exemplo, as convexidades *geodésica*, *monofônica* e P_3 são definidas tomando $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ como sendo S mais todo vértice em um caminho entre dois vértices de S que seja mínimo, ou induzido, ou P_3, respectivamente. Sejam $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G)$ e $\mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G)$ os tamanhos dos menores conjuntos S_1 e S_2 tais que $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(S_1) = V$ e $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S_2) = V$, respectivamente.

Definição 1.1. *Nos jogos de convexidade abaixo, o conjunto L de vértices rotulados é inicialmente vazio e $f(L)$ e $g(L)$ dependem do jogo. Alice e Bob se alternam rotulando um vértice ainda não rotulado $v \notin f(L)$. O jogo termina se $g(L) = V(G)$.*

- *No jogo JE$_{\mathcal{C}}$ da envoltória $\mathcal{C}$:* $\quad f(L) = L$ *e* $g(L) = \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(L)$.

[1]Alguns autores, como [Pelayo 2013], usam o termo *geodética* como adjetivo do substantivo *geodésica*. No entanto, livros clássicos como [van de Vel 1993] e [Gruber and Wills 1993] usam apenas o termo *geodésica* para substantivo e adjetivo e não usam o termo *geodética*. Preferimos seguir esse padrão.

- *No jogo JI$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$:* $f(L) = L$ *e* $g(L) = \mathrm{I}_\mathcal{C}(L)$.
- *No jogo JEF$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$ fechada:* $f(L) = g(L) = \mathrm{hull}_\mathcal{C}(L)$.
- *No jogo JIF$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$ fechado:* $f(L) = g(L) = \mathrm{I}_\mathcal{C}(L)$.

Cada jogo tem 3 variantes: *normal* (o último a jogar vence), *pobre (misère)* (o último a jogar perde) e *ótima* (ou *de otimização*), na qual, além do grafo G, a instância também tem um inteiro $k > 0$, e Alice vence se $|L| \le k$ no final. Do Teorema de [Zermelo 1913], um dos jogadores tem estratégia vencedora em cada um desses jogos e suas variantes, pois são jogos finitos de informação perfeita e sem empate. Com isso, o problema de decisão desses jogos é decidir se Alice tem estratégia vencedora.

Definição 1.2. *As variantes de otimização induzem 4 novos parâmetros de convexidade:*

- Número $\mathrm{ghn}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JE$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$,
- Número $\mathrm{gin}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JI$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$,
- Número $\mathrm{cghn}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JEF$_\mathcal{C}$ da envoltória $\mathcal{C}$ fechada *e*
- Número $\mathrm{cgin}_\mathcal{C}(G)$ do jogo JIF$_\mathcal{C}$ do intervalo $\mathcal{C}$ fechado,

que consistem do mínimo k tal que Alice tem estratégia vencedora na variante de otimização do jogo de convexidade correspondente na convexidade $\mathcal{C}$ sobre o grafo G.

Usamos os subscritos "m", "g" e "P3" para indicar as convexidades monofônica, geodésica e P_3, respectivamente. A seguir, listamos alguns resultados. Seja $n \ge 4$.

Lema 1.3 ([Buckley and Harary 1985])**.** *No ciclo C_n, Alice vence o jogo JI$_\mathrm{g}$ normal se e só se n é ímpar e vence o jogo JI$_\mathrm{g}$ pobre se e só se $n \mod 4$ é 1 ou 2.*

2. Jogos de Convexidade: Resultados preliminares

Nesta seção, listamos alguns resultados novos.

Lema 2.1. *Alice vence os 4 jogos da Def. 1.1 nas convexidades monofônica e geodésica no grafo completo K_n se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Na convexidade P_3, Alice perde a variante normal e vence a variante pobre dos 4 jogos de convexidade em K_n. Todos os parâmetros da Def. 1.2 são iguais a n nas convexidades monofônica e geodésica e são iguais a 2 na convexidade P_3.*

Lema 2.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma convexidade sobre um grafo G. Então:*

- $\mathrm{hn}_\mathcal{C}(G) \le \mathrm{cghn}_\mathcal{C}(G) \le \mathrm{ghn}_\mathcal{C}(G) \le \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{hn}_\mathcal{C}(G) - 1,\ n \right\}$ *e*
- $\mathrm{in}_\mathcal{C}(G) \le \mathrm{cgin}_\mathcal{C}(G) \le \mathrm{gin}_\mathcal{C}(G) \le \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{in}_\mathcal{C}(G) - 1,\ n \right\}$.

Um exemplo no limite superior é o jogo da envoltória P_3 nos ciclos C_4 e C_6, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=2, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_4)$=3, $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=3, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=4 e $\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_6)$=5. No limite inferior, temos os ciclos C_3 e C_5, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=$\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=3. Um exemplo no meio é o ciclo C_7, pois $\mathrm{hn}_{\mathrm{P3}}(C_7)$=4 e $\mathrm{cghn}_{\mathrm{P3}}(C_7)$=$\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(C_5)$=5 < 7.

Lema 2.3. *Bob sempre vence as variantes normal e pobre dos 4 jogos da convexidade monofônica no ciclo C_n. Ademais,* $\mathrm{ghn}_\mathrm{m}(C_n) = \mathrm{gin}_\mathrm{m}(C_n) = \mathrm{cghn}_\mathrm{m}(C_n) = \mathrm{cgin}_\mathrm{m}(C_n) = 3$.

Lema 2.4. *Alice vence a variante normal dos jogos JI$_\mathrm{g}$ e JIF$_\mathrm{g}$ em C_n se e só se n é ímpar. Ademais, Bob sempre vence a variante pobre dos jogos JI$_\mathrm{g}$ e JIF$_\mathrm{g}$ em C_n. Por fim,* $\mathrm{cghn}_\mathrm{g}(C_n) = \mathrm{cgin}_\mathrm{g}(C_n) = \mathrm{ghn}_\mathrm{g}(C_n) = \mathrm{gin}_\mathrm{g}(C_n) = 3$.

2.1. Estratégias vencedoras em convexidades geométricas

Dizemos que uma convexidade $\mathcal{C}$ em G é *geométrica* (ou é uma *geometria convexa*) se satisfaz a propriedade de *Minkowski–Krein–Milman*: todo conjunto $\mathcal{C}$-convexo S é o fecho convexo de seus pontos extremos, que são os vértices $v \in S$ tais que $S \setminus \{x\}$ também é $\mathcal{C}$-convexo. Seja $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)$ o conjunto de pontos extremos de $V(G)$ em $\mathcal{C}$.

A pesquisa sobre geometrias convexas em grafos geralmente se concentra em determinar a classe de grafos na qual uma determinada convexidade é geométrica. [Farber and Jamison 1986] provaram que a convexidade monofônica (resp. geodésica) é geométrica se e só se o grafo é cordal (resp. Ptolemaico), onde um grafo é cordal se todo ciclo induzido é um triângulo, é distância hereditária se todo caminho induzido é mínimo e é Ptolemaico se é cordal e distância hereditária. Note que as convexidades geodésica e monofônica são equivalentes em grafos distância hereditária.

Nesta seção, obtemos uma conexão interessante entre geometrias convexas em grafos e estratégias vencedoras em jogos de convexidade.

Teorema 2.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma convexidade em um grafo G tal que $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)) = V(G)$ (resp. $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)) = V(G)$). Então Alice vence o jogo JE$_{\mathcal{C}}$ (resp. JI$_{\mathcal{C}}$) se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Ademais, na variante de otimização, $\mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G) = \ell$ (resp. $\mathrm{gin}_{\mathcal{C}}(G) = \ell$), onde $\ell = \min\left\{\, 2 \cdot |\,\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)| \, - 1,\ n \,\right\}$.*

Demonstração. **[esboço]** Seja $S = \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)$. Lembre que $V(G) \setminus \{s\}$ é $\mathcal{C}$-convexo para todo $s \in S$. Ou seja, todo vértice de S deve ser rotulado nos jogos JE$_{\mathcal{C}}$ e JI$_{\mathcal{C}}$. Se $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)) = V(G)$, os jogos JI$_{\mathcal{C}}$ terminam quando o último vértice de S é rotulado. Se $\mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)) = V(G)$, os jogos JE$_{\mathcal{C}}$ terminam quando o último vértice de S é rotulado. Os argumentos a seguir valem para ambos os jogos JE$_{\mathcal{C}}$ e JI$_{\mathcal{C}}$. Na variante normal, Alice vence se rotular o último vértice não rotulado de S. Se n é ímpar, Alice joga evitando os dois últimos vértices de S, forçando Bob a rotular o penúltimo vértice de S, e com isso, Alice vence o jogo. Se n é par, Bob vence (o argumento é análogo). Na variante pobre, Alice vence se Bob rotular o último vértice não rotulado de S. Se n é par, Alice joga evitando o último vértice de S, forçando Bob a rotulá-lo, e com isso, Alice vence o jogo. Se n é ímpar, Bob vence (o argumento é análogo). □

Com isso, obtemos uma conexão interessante com geometrias convexas.

Teorema 2.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma convexidade geométrica em um grafo G. Então Alice vence o jogo JE$_{\mathcal{C}}$ se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Além disso, na variante de otimização, $\mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G) = \min\left\{\, 2 \cdot |\,\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(G)| \, - 1,\ n \,\right\}$.*

O teorema abaixo estende um resultado de [Haynes et al. 2003] para a convexidade geodésica em grafos de bloco, pois formam uma subclasse de grafos Ptolemaicos. Note também que grafos completos são cordais e Ptolemaicos (ver Lema 2.1).

Teorema 2.7. *Em grafos cordais, Alice vence os jogos da envoltória e do intervalo monofônicos se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Em grafos Ptolemaicos, Alice vence os jogos da envoltória e do intervalo geodésicos se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre.*

O teorema a seguir trata da convexidade P_3

Teorema 2.8. *Seja T uma árvore enraizada em que todo nó não folha tem pelo menos dois filhos. Então Alice ganha o jogo da envoltória P_3 em T se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante pobre. Ademais,* $\mathrm{ghn}_{\mathrm{P3}}(T) = n$.

Demonstração. **[esboço]** Observe que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{P3}}(T)$ é o conjunto de folhas de T e é um conjunto P_3-hull de T, já que todo nó não folha tem dois filhos, e finalizamos nosso argumento a partir do Teorema 2.5. Por fim, $n \leq 2 \cdot |\,\mathrm{Ext}_{\mathrm{P3}}(T)| - 1$. □

2.2. Complexidade PSPACE dos jogos da envoltória monofônica e geodésica

Na versão *simplificada* de um jogo de convexidade, a instância já possui um vértice v rotulado antes do jogo. Bob tem estratégia vencedora em G se e só se Alice tem estratégia vencedora no jogo simplificado em (G, v) para todo vértice v de G.

Obtemos reduções do jogo de formação de cliques, que é PSPACE-completo [Schaefer 1978]. Neste jogo, Alice e Bob se alternam selecionando vértices, que devem formar uma clique. Quem joga por último vence.

Teorema 2.9. *A variante pobre do jogo simplificado da envoltória monofônica é PSPACE-completa mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. **[esboço]** Seja H um grafo não completo no jogo de formação de cliques. Seja G o grafo de diâmetro 2 obtido de H incluindo 2 vértices u_1 e u_2 adjacentes a todo vértice de H. Seja u_1 o vértice já rotulado na versão simplificada. Provamos que Alice tem estratégia vencedora no jogo de cliques em H se e só se também tem na variante pobre do jogo simplificado $\mathrm{JE_m}$ em (G, u_1). Um jogador perde se rotular u_2, pois $\mathrm{hull}_m(u_1, u_2) = V(G)$. Também perde se rotular $v_j \in V(H)$ e há $v_i \in V(H)$ rotulado não-vizinho de v_j, pois $\mathrm{hull}_m(v_i, v_j) = V(G)$. Logo, assuma que o conjunto L de rotulados é uma clique em todas as rodadas, exceto na última. Isso está relacionado ao jogo de cliques em H. Se Alice tem estratégia vencedora no jogo de cliques em H, então Bob é o primeiro a rotular um vértice de G que tem um não-vizinho rotulado, perdendo o jogo pobre. Analogamente, se Bob tem estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H. □

Teorema 2.10. *A variante normal do jogo simplificado da envoltória monofônica é PSPACE-completa mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Demonstração. **[esboço]** Considere a mesma redução do Teorema 2.9, mas adicionando a G um novo vértice w, que é isolado. Como antes, deixe u_1 ser o vértice já rotulado em G. Se um jogador rotular w (resp. u_2) quando u_2 (resp. w) não estiver rotulado, ele/ela perderá imediatamente, pois o oponente rotula u_2 (resp. w), ganhando o jogo de conquista, pois $\mathrm{hull}_m(u_1, u_2, w) = V(G)$. Além disso, se um jogador rotular um vértice v_j de H no jogo hull e houver um vértice rotulado não adjacente v_i em H, então o jogador perderá imediatamente, pois o oponente rotula w, ganhando o jogo porque $\mathrm{hull}_m(v_i, v_j, w) = V(G)$. Portanto, podemos assumir que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todas as rodadas, exceto na última. Como antes, isso está diretamente relacionado ao jogo de formação de cliques em H: Alice tem uma estratégia vencedora no jogo hull de conquista em G se e somente se ela tem uma estratégia vencedora no jogo de formação de cliques em H. □

Corolário 2.11. *As variantes normal e pobre dos jogos* $\mathrm{JE_m}$, $\mathrm{JE_g}$, $\mathrm{JEF_m}$ *e* $\mathrm{JEF_g}$ *são PSPACE-completas, mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Referências

Buckley, F. and Harary, F. (1985). Geodetic games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 8:321–334.

Farber, M. and Jamison, R. E. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(3):433–444.

Gruber, P. M. and Wills, J. M. (1993). *Handbook of Convex Geometry*. North Holland.

Harary, F. (1984). Convexity in graphs: Achievement and avoidance games. In Rosenfeld, M. and Zaks, J., editors, *Convexity and Graph Theory*, volume 87 of *North-Holland Mathematics Studies*, page 323. North-Holland.

Haynes, T. W., Henning, M. A., and Tiller, C. (2003). Geodetic achievement and avoidance games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 26:389–397.

Pelayo, I. M. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer.

Schaefer, T. J. (1978). On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225.

van de Vel, M. L. J. (1993). *Theory of convex structures*, volume 50. Elsevier.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, pages 501–504.