

Um QPTAS para o Problema de Empacotamento de Círculos em Linha

Elisa Dell'Arriva¹, Flávio K. Miyazawa¹

¹Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas – SP – Brazil

Abstract. *In the circle in-line packing problem, we have a list of circles that must be placed side by side over a horizontal line, so that each circle touches the line only at its lowest point. The objective is to minimize the distance between the leftmost and the rightmost points of the circles that define the extremes of the packing. In 2018, [Dürr et al. 2018] presented a QPTAS for the particular case where the items are isosceles right triangles. In this text, we present an adaptation of the QPTAS to the circle in-line packing problem.*

Resumo. *No problema de empacotamento de círculos em linha, é dada uma lista de círculos que devem ser dispostos lado a lado sobre uma linha horizontal, de forma que cada círculo toque a linha somente em seu ponto mais baixo. O objetivo é minimizar a distância entre os pontos mais à esquerda e mais à direita dos círculos que definem os extremos do empacotamento. Em 2018, [Dürr et al. 2018] mostraram um QPTAS para o caso em que os itens são triângulos retângulos isósceles. Neste texto, apresentamos uma adaptação desse QPTAS para o problema de empacotamento de círculos em linha.*

1. Introdução

Os chamados problemas de empacotamento formam um amplo conjunto de problemas de otimização. De forma geral, em um problema de empacotamento, temos um conjunto de *itens* pequenos, um *recipiente* grande e desejamos arranjar os itens nos recipientes. O problema que abordamos neste trabalho tem círculos como itens. Há tempos, discos e esferas despertam interesse de pesquisadores em áreas teóricas. A famosa conjectura de Kepler [Kepler 1611], que versa sobre a densidade máxima de um empacotamento de esferas idênticas no espaço tridimensional, data de 1611 e permaneceu aberta por quase quatro séculos. A primeira prova formal foi dada em 2006 por [Hales and Ferguson 2006]. Mais recentemente, [Viazovska 2017] publicou um trabalho sobre empacotamento ótimo de esferas em 8 dimensões e, posteriormente, [Cohn et al. 2017] estenderam o resultado para 24 dimensões. Embora existam muitos estudos sobre empacotamento de formas circulares sob diferentes abordagens matemáticas, no contexto de algoritmos de aproximação, não encontramos trabalhos com a mesma abundância. Ao leitor interessado em técnicas de empacotamento de círculos e esferas nesse contexto, recomendamos o trabalho de [Miyazawa and Wakabayashi 2022].

Problemas de empacotamento de círculos também aparecem na prática. Em telecomunicações, por exemplo, podem modelar problemas envolvendo área de cobertura de torres de sinais e distribuição de frequências. Neste texto, abordamos o problema de *empacotamento de círculos em linha* (ECL). A entrada é uma coleção de círculos, os quais queremos posicionar sobre uma linha horizontal da seguinte forma: não há sobreposição

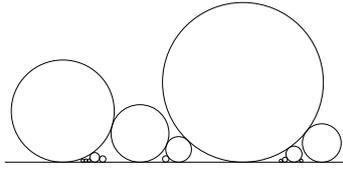


Figura 1. Um exemplo de empacotamento de círculos em linha.

entre quaisquer dois círculos e todo círculo está acima da linha, tocando-a em exatamente um ponto. O objetivo é minimizar o *makespan*, i.e., a distância entre o ponto mais à esquerda e o ponto mais à direita dos círculos que definem, respectivamente, os extremos esquerdo e direito do empacotamento. Veja Figura 1. [Dürr et al. 2018] estudaram esse problema triângulos retângulos isósceles. Eles mostraram uma $3/2$ -aproximação e um QPTAS. [Alt et al. 2018] investigaram a versão do problema para círculos, para a qual apresentaram uma $4/3$ -aproximação. No mesmo trabalho, os autores indicaram que a estratégia utilizada por Dürr et al. no QPTAS para triângulos poderia funcionar também na versão com círculos. Nesse trabalho, nós apresentamos uma adaptação da estratégia, confirmando que, de fato, existe um QPTAS para o problema ECL. O restante do texto está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos uma adaptação do QPTAS para círculos e na Seção 3, oferecemos considerações sobre trabalhos futuros.

2. Um QPTAS para o Problema de Empacotamento xsde Círculos em Linha

A entrada do problema ECL é uma coleção de círculos identificados pelo conjunto $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, sendo r_i o raio do círculo $i \in \mathcal{I}$. Um *empacotamento em linha* P de \mathcal{I} é uma disposição dos círculos sobre o eixo x do plano euclidiano, tal que: 1) não há sobreposição entre círculos e, 2) todo círculo $i \in \mathcal{I}$ toca o eixo em exatamente um ponto, o qual chamamos de *posição base* e denotamos por b_i . Sem perda de generalidade, definimos o extremo esquerdo do empacotamento na origem do plano. Assim, o *makespan* de P , denotado por $|P|$, é dado por $\max_{i \in \mathcal{I}}(b_i + r_i)$. A seguir, apresentamos o QPTAS.

O primeiro passo do algoritmo é particionar a instância em dois conjuntos, um de círculos grandes e outro de círculos pequenos, e empacotá-los de forma independente. Os pequenos são empacotados por um algoritmo de aproximação de fator constante. Para os grandes, a ideia é considerar as diferentes maneiras como podemos empacotar um conjunto de círculos. Note que um empacotamento em linha pode ser descrito como uma sequência dos círculos que o compõem. Assim, é possível limitar a quantidade de candidatos a empacotamento pelas permutações do conjunto de círculos que queremos empacotar. Contudo, enumerar tais candidatos é inviável. Para limitar o espaço de busca, restringimos as posições base possíveis em um empacotamento a um conjunto finito de pontos. Essa limitação pode levar a um aumento no *makespan*, contudo, como mostramos mais adiante, esse aumento é pequeno. Com isso, o que queremos é distribuir um conjunto de círculos entre um conjunto de pontos.

Dada a definição do *makespan* e, dado que devemos minimizá-lo, ao construir um empacotamento, buscamos sempre posicionar os círculos o quão mais próximo da origem quanto possível, sem causar sobreposição. Suponha que temos um empacotamento de um subconjunto de círculos e vamos adicionar o próximo círculo ao final dele. Assim, se existe um círculo já empacotado cujo raio é igual ao do círculo sendo adicionado, o segundo sempre será posicionado à direita do primeiro. Logo, ao adicionar um círculo no final do empacotamento que já temos, basta garantir que ele não sobrepõe os círculos

mais à direita de cada raio diferente. Dessa forma, dado um empacotamento, conseguimos construir um novo empacotamento contendo um círculo a mais (adicionado ao fim do empacotamento anterior), sabendo apenas as posições base do círculo mais à direita de cada raio diferente, em tempo polinomial no tamanho da entrada. Veremos que as possibilidades de empacotamento podem ser limitadas a uma quantidade quasi-polinomial no tamanho da entrada. A seguir, mostramos uma apresentação mais formal dessas ideias.

Sejam $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ uma instância do ECL e $\varepsilon > 0$, uma constante. A instância é particionada em um conjunto de círculos pequenos, $S = \{i \in \mathcal{I} \mid r_i < \varepsilon r_{\max}/n\}$, em que r_{\max} é o raio do maior círculo de \mathcal{I} , e um conjunto de círculos grandes, $L = \mathcal{I} \setminus S$. Os raios dos maior e menor círculos de L são denotados por r_{\max}^L e r_{\min}^L , respectivamente. Os círculos de S são tão pequenos que é suficiente empacotá-los com um algoritmo de aproximação constante e concatená-los em um empacotamento dos grandes, o qual descrevemos a seguir. O primeiro passo é a discretização do eixo x . Definimos um conjunto de pontos $B = \{0, \kappa, 2\kappa, \dots, \lceil n^2/\varepsilon \rceil \kappa\}$, sendo $\kappa = \varepsilon r_{\max}^L/n$. Assim, $|B| = \lceil n^2/\varepsilon \rceil + 1$. O próximo lema garante que é possível transformar um empacotamento ótimo em um empacotamento restrito aos pontos de B , com apenas um pequeno aumento no *makespan*.

Lema 1. *Seja P^* um empacotamento ótimo de \mathcal{I} . Restringir as posições base ao conjunto B aumenta o *makespan* em $\mathcal{O}(\varepsilon)|P^*|$.*

A princípio, a quantidade de raios diferentes pode ser até n (uma instância em que todos os círculos são distintos). Para diminuir o número de raios diferentes, arredondamos (para cima) os raios dos círculos. Sem perda de generalidade, reescalamos os círculos de L de forma que $r_{\min}^L = 1$. O lema a seguir garante que existe um arredondamento dos círculos grandes que gera apenas um pequeno aumento no *makespan*.

Lema 2. *Seja P^* um empacotamento ótimo de L . Arredondar os círculos tal que $\bar{r}_i = \min(r_{\min}^L(1+\varepsilon)^\ell : r_{\min}^L(1+\varepsilon)^\ell > r_i, \ell \in \{0, 1, 2, \dots\})$ aumenta o *makespan* em $\mathcal{O}(\varepsilon)|P^*|$.*

Agora, queremos construir um empacotamento ótimo dos círculos de L arredondados utilizando apenas pontos do conjunto B como posições base. O número de raios diferentes após o arredondamento é $T = \lceil \log_{1+\varepsilon} r_{\max}^L \rceil + 1 \leq \lceil \log_{1+\varepsilon}(n/\varepsilon) \rceil + 1$. Definimos uma *configuração* como uma tupla (p_1, \dots, p_T) em que cada p_i indica a posição base do círculo mais à direita do i -ésimo raio diferente, $i = 1, \dots, T$. Denotamos por \mathcal{C} o conjunto de todas as configurações. Vamos obter um empacotamento de L por partes, via uma programação dinâmica descrita a seguir.

Algoritmo 1. Particionamos L em um subconjunto $L_{\text{IN}} \subseteq L$, que representa os círculos já empacotados, e seu complementar $L_{\text{OUT}} = L \setminus L_{\text{IN}}$, que representa os círculos ainda não empacotados. Construímos uma tabela F tal que, dados subconjunto $A \subseteq L$ e configuração $C \in \mathcal{C}$, $F(C, A)$ indica o *makespan* de um empacotamento ótimo de A cujas posições base dos círculos mais à direita de cada raio diferente são dadas pela configuração C . Começamos com $L_{\text{IN}} = \emptyset$ e $L_{\text{OUT}} = L$. A cada iteração do algoritmo, adicionamos um círculo s no empacotamento e repetimos o processo para $L_{\text{IN}} \cup \{s\}$ e $L_{\text{OUT}} \setminus \{s\}$. Para $L_{\text{IN}} = \emptyset$, temos $F(C, \emptyset) = 0$, para toda configuração $C \in \mathcal{C}$. Em seguida, seja $s \in L_{\text{OUT}}$ um círculo ainda não empacotado. Para cada configuração $C' \in \mathcal{C}$ associada a L_{IN} , adicionamos s ao final do empacotamento representado por C' , obtendo, assim, uma configuração $C \in \mathcal{C}$ associada a $L_{\text{IN}} \cup \{s\}$. Note que fixada uma configuração C' , existem várias configurações C que representam $L_{\text{IN}} \cup \{s\}$, pois o círculo s pode ser adicionado em qualquer uma das posições de B .

Mostramos que o Algoritmo 1 corretamente constrói a tabela F , em tempo quasi-polinomial em n . A prova é por indução em $|L_{\text{IN}}|$. Quando $L_{\text{IN}} = \emptyset$, temos $F(C, L_{\text{IN}}) = 0$ para toda configuração $C \in \mathcal{C}$ e o resultado segue. Seja $L_{\text{IN}} \subseteq L$ tal que $|L_{\text{IN}}| \geq 1$ e seja $s \in L_{\text{IN}}$ um círculo arbitrário. Por hipótese de indução, existe configuração $C' = (p_1, \dots, p, \dots, p_T)$ para $L_{\text{IN}} \setminus \{s\}$, em que p é a posição do círculo mais à direita cujo raio é o mesmo de s , tal que $F(C', L_{\text{IN}} \setminus \{s\})$ é ótimo. Construimos uma configuração $C = (p_1, \dots, q, \dots, p_T)$ para L_{IN} em que $q \in B$ é a posição mais à esquerda na qual pode-se empacotar s sem causar sobreposição com os círculos mais à direita de cada um dos demais raios. Então, C representa um empacotamento viável para L_{IN} . Como s é posicionado o mais perto possível da origem, $F(C, L_{\text{IN}})$ é ótimo. O número de subconjuntos de L é da ordem de $\mathcal{O}(|L|^T) \subseteq \mathcal{O}(n^{\log n})$. Para cada subconjunto, temos na ordem de $\mathcal{O}(|B|^T) \subseteq \mathcal{O}(n^{\log n})$ configurações. Finalmente, para encontrar a posição de um círculo, percorremos o conjunto B , que é polinomial em n . Assim, o procedimento todo é feito em tempo quasi-polinomial em n .

Finalmente, podemos enunciar o resultado final.

Teorema 3. *Dada uma coleção \mathcal{I} de n círculos, conseguimos construir um empacotamento P de \mathcal{I} tal que $|P| \leq (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\text{OPT}(\mathcal{I})$, em tempo quasi-polinomial em n .*

Demonstração. Particionamos \mathcal{I} nos subconjuntos L e S de círculos grandes e pequenos, respectivamente. Usamos o Algoritmo 1 para obter a tabela F . Seja C uma configuração tal que $F(C, L)$ é mínimo. A partir de $C = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_T)$, construimos um empacotamento ótimo P_L dos círculos arredondados de L da seguinte forma: seja s o círculo de C com maior posição base; empacote s na posição base p_i e repita o processo para configuração $C' = (p_1, \dots, d_i, \dots, p_T)$ de $L \setminus \{s\}$, em que d_i é a posição do círculo mais à direita de raio igual ao de s , dentre os círculos de C' . Isso leva tempo quasi-polinomial em n e, pelos Lemas 1 e 2, temos que $|P_L| \leq (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\text{OPT}(\mathcal{I})$. Substituímos os círculos arredondados pelos originais correspondentes. Em seguida, usamos a 4/3-aproximação de [Alt et al. 2018] para obter um empacotamento P_S de S . Logo, $|P_S| \leq \frac{4}{3}\text{OPT}(S) \leq \frac{4}{3}\varepsilon\text{OPT}(\mathcal{I})$. Finalmente, adicionamos P_S ao final de P_L e temos um empacotamento P de \mathcal{I} tal que $|P| \leq (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\text{OPT}(\mathcal{I})$. \square

3. Considerações Finais

Observamos que o QPTAS apresentado requer três requisitos: 1) o número de tamanhos diferentes entre os itens é de ordem logarítmica, 2) o espaço de busca é de ordem polinomial e 3) dados dois itens e suas respectivas posições, é possível decidir, em tempo polinomial, se empacotá-los dessa forma gera sobreposição. Assim, acreditamos que a mesma estratégia possa ser adaptada para outras formas, como por exemplo, triângulos (gerais) e elipses. Ainda, seguindo ideias apresentadas em [Miyazawa et al. 2016], levantamos a possibilidade de generalização para hiper-esferas no L_p -espaço.

De toda forma, o fato de existir um QPTAS para o ECL naturalmente instiga a busca por um PTAS. Até o momento, não encontramos novos resultados acerca do problema de empacotamento em linha, indicando existir um bom espaço para investigações futuras. Para uma descrição mais detalhada das estratégias que apresentamos aqui, recomendamos a dissertação de mestrado de [Dell'Arriva 2021].

Esse projeto foi parcialmente financiado por CNPq (Proc. 313146/2022-5) e FAPESP (2015/11937-9, 2016/01860-1).

Referências

- Alt, H., Buchin, K., Chaplick, S., Cheong, O., Kindermann, P., Knauer, C., and Stehn, F. (2018). Placing your coins on a shelf. *Journal of Computational Geometry*, 9:312–327.
- Cohn, H., Kumar, A., Miller, S., Radchenko, D., and Viazovska, M. (2017). The sphere packing problem in dimension 24. *Annals of Mathematics*, 185(3).
- Dell’Arriva, E. (2021). In-line packing of circles. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Dürr, C., Hanzálek, Z., Konrad, C., Seddik, Y., Sitters, R., Óscar C. Vásquez, and Woeginger, G. (2018). The triangle scheduling problem. *Journal of Scheduling*, 21:305–312.
- Hales, T. and Ferguson, S. (2006). A formulation of the kepler conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 36:21–69.
- Kepler, J. (1611). *Strena seu de nive sexangula* (the six-cornered snowflake).
- Miyazawa, F. K., Pedrosa, L. L. C., Schouery, R. C. S., Sviridenko, M., and Wakabayashi, Y. (2016). Polynomial-time approximation schemes for circle and other packing problems. *Algorithmica*, 76(2):536–568.
- Miyazawa, F. K. and Wakabayashi, Y. (2022). Techniques and results on approximation algorithms for packing circles. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 16(1):585–615.
- Viazovska, M. (2017). The sphere packing problem in dimension 8. *Annals of Mathematics*, 185(3).