PTAS para Problema do Empacotamento de Soma Mínima com Quadrados*

Rachel V. Saraiva[1], **Rafael C. S. Schouery**[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas, SP – Brasil

{r185961,rafael}@ic.unicamp.br

Abstract. *This work discuss the min-sum bin packing problem with square items, where a list of square items has to be packed into bins of dimension* 1×1*, and the cost of packing each item is equal to the index of the bin it is placed in. The problem has applications in minimizing the average time of logistic operations such as cutting stock and delivery of products. In this paper we present an approximation scheme (PTAS) for the problem.*

Resumo. *O trabalho trata do problema do empacotamento de soma mínima com itens quadrados, em que uma lista de itens quadrados deve ser empacotada em recipientes* 1×1*, e o custo de empacotar cada item é igual ao índice do recipiente em que é empacotado. O problema tem aplicações na minimização do tempo médio de operações logísticas como corte e entrega de produtos. Nesse trabalho apresentamos um esquema de aproximação (PTAS) para o problema.*

1. Introdução

O *problema do empacotamento* é um problema NP-difícil [Garey and Johnson 1979] clássico, muito relevante para o setor industrial por modelar problemas de logística, como armazenamento de produtos e arquivos digitais, corte de materiais, carregamento de veículos, alocação de tarefas computacionais a servidores, entre outros [Eliiyi and Eliiyi 2009].

Definimos o tamanho de um quadrado como o tamanho de seu lado. Uma instância do problema com quadrados é uma lista com n itens quadrados de tamanhos $s_1, \ldots, s_n \in (0, 1]$ que devem ser todos empacotados em recipientes quadrados $B_1, \ldots, B_m$ de tamanho 1, sem que haja interseção entre as áreas internas de quaisquer dois itens ou interseção da área interna de um item com as bordas do recipientes. Os itens são empacotados com seus lados paralelos aos lados dos recipientes. O objetivo no problema clássico é minimizar o número de recipientes usados, m. Em aplicações reais, minimizar m reduz custos de armazenamento de produtos e o desperdício de materiais.

No *problema do empacotamento de soma mínima* (PESM), o custo de empacotar um item no j-ésimo recipiente da solução é j. O objetivo é minimizar o custo total de empacotar os itens, ou seja, minimizar a função $\sum_{j=1}^{m} j \cdot |B_j|$, onde $|B_j|$ é a quantidade de

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Também houve apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelos processos 311039/2020-0 e 163644/2021-7, e da empresa QuintoAndar.

itens no recipiente B_j. Note que minimizar a soma dos custos é equivalente a minimizar o custo médio de cada item e, assim, essa variante tem aplicações na minimização do tempo médio de operações como, por exemplo, a entrega de itens por um único veículo (onde os recipientes da solução representam a carga que o veículo carrega a cada viagem), e o corte de peças de um material (onde os recipientes representam as folhas do material a ser cortado).

Até o momento, o PESM só foi estudado com itens unidimensionais [Epstein and Levin 2007, Epstein et al. 2018]. Neste trabalho definimos uma variante com itens quadrados do problema, e apresentamos um *Esquema de Aproximação em Tempo Polinomial* (PTAS) para esta variante. Um PTAS é uma família de algoritmos $\{A_\varepsilon\}$ onde, para cada $\varepsilon > 0$, o algoritmo A_ε encontra em tempo polinomial, para qualquer instância I do problema, solução de valor $A_\varepsilon(I) \leq (1+\varepsilon)\mathit{OPT}(I)$, onde $\mathit{OPT}(I)$ é o valor de uma solução ótima para I.

2. PTAS

Seja $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$ tal que $1/\varepsilon$ é um inteiro e $n \geq 1/\varepsilon^3$. Classificamos os itens em pequenos, grandes e médios, garantindo que itens grandes tenham área pelo menos $1/\varepsilon^6$ vezes maior que a de um item pequeno, e que os itens médios sejam poucos e que sua área total seja pequena comparada a área de todos os itens. Assim como no PTAS unidimensional [Epstein et al. 2018], arredondamos os tamanhos dos itens grandes e encontramos um empacotamento ótimo para tais itens arredondados. Depois empacotamos os pequenos de forma superótima, ou seja, com um empacotamento inviável de custo menor que o de uma solução ótima. Por fim, tornamos esses empacotamentos em uma solução viável para toda a instância sem aumentar muito o valor da solução.

Para um conjunto S de itens, denotamos a soma das áreas dos itens de S por $\mathit{AREA}(S)$. Definimos agora o conceito de itens médios, pequenos e grandes da seguinte forma. Seja $M_i = \{j : s_j \in [\varepsilon^{(3/\varepsilon)(i+1)}, \varepsilon^{(3/\varepsilon)i})\}$ para $i = 1, \ldots, 1/\varepsilon^3$. Isso define $1/\varepsilon^3$ subconjuntos disjuntos de itens da instância e, portanto, existe i tal que $|M_i| \leq \varepsilon^3 n$. Seja $M_{i\ell} = \{j \in |M_i| : s_j \in [\varepsilon^{(3/\varepsilon)i+3(\ell+1)}, \varepsilon^{(3/\varepsilon)i+3\ell})\}$ para $\ell = 0, \ldots, \frac{1}{\varepsilon} - 1$ e note que existe ℓ para o qual $\mathit{AREA}(M_{i\ell}) \leq \varepsilon \mathit{AREA}(I)$. Seja $M = M_{i\ell}$ para tais valores de i e ℓ, e para simplificar a notação seja também $p = (3/\varepsilon)i + 3\ell$. Chamamos os itens em M de itens médios, itens de tamanho pelo menos ε^p de itens grandes (denotados por L), e itens de tamanho menor que ε^{p+3} de itens pequenos (denotados por S).

2.1. Itens pequenos

Definimos uma heurística orientada a níveis baseada na Next Fit Increasing Height (NFIH) para empacotar itens pequenos. Os itens são ordenados em ordem não-decrescente de tamanho e empacotados lado a lado em níveis. A altura de cada nível é definido como a altura do último item empacotado nele em vez do primeiro. Quando um item não cabe no nível atual, começa-se outro nível, e o anterior não é mais considerado para receber mais itens. Empacotamos então os níveis construídos por NFIH em recipientes, e se um nível não cabe no recipiente atual, ele e mais três níveis são empacotados acima do topo do recipiente, tornando a solução inviável (consideramos que o custo desses itens ainda é o índice do recipiente). Após isso, outro recipiente é aberto e o empacotamento continua da mesma forma, até que todos os níveis tenham sido empacotados. Seja Q_j o conjunto de itens empacotados no recipiente j e acima dele. Seja

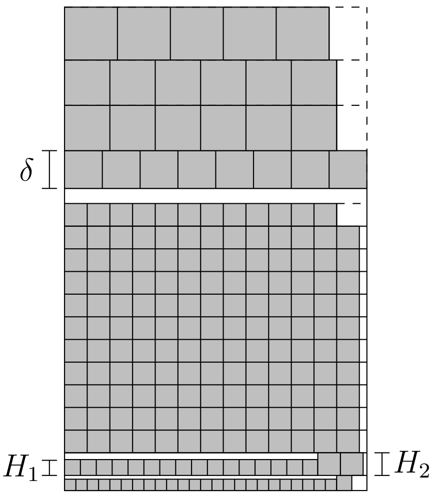

Figura 1. Exemplo de empacotamento por HNFI, com quatro níveis empacotados de forma inviável acima do recipiente. A altura H_i de cada nível é o tamanho do último item nele empacotado. Os itens empacotados acima do recipiente têm tamanho pelo menos δ (tamanho do primeiro item empacotado acima do recipiente).

também Q o empacotamento inviável construído por essa heurística, e $V(P)$ o custo de um empacotamento P. Seja r a quantidade de recipientes usados, e δ o tamanho do primeiro item empacotado acima de qualquer recipiente exceto o último. A área vazia total nesse recipiente é menor que 3δ. Cada nível acima do recipiente tem largura ocupada pelo menos $1 - \varepsilon^{p+3}$, do contrário seria capaz de empacotar mais um item pequeno. Então a área ocupada em cada um desses níveis é pelo menos $(1 - \varepsilon^{p+3})\delta \geq \frac{3}{4}\delta$, pois $\varepsilon \leq 1/4$ e, assim, a área total de todos os itens em Q_j (exceto, possivelmente, Q_r) é maior que 1. Como os itens estão em ordem não-decrescente de tamanho, a quantidade de itens que qualquer solução viável pode empacotar em t recipientes é menor que $\sum_{j=1}^{t} |Q_j|$. Com isso, obtemos o seguinte lema.

Lema 1. *OPT*$(S) \geq \sum_{j=1}^{r} j|Q_j| = V(Q)$. □

Dividimos os recipientes de Q em blocos de $\lceil 1/(4\varepsilon^{p+3}) \rceil$ recipientes cada (o ultimo bloco pode ter menos recipientes), e abrimos um novo recipiente em cada um desses blocos para empacotar os níveis acima dos recipientes do bloco. Como os níveis movidos para o novo recipiente têm no máximo $1/\delta$ itens cada e os níveis que permanecem no recipiente têm pelo menos $1/\delta$ itens cada, a razão de itens movidos para o total de itens no recipiente é, no máximo,

$$\frac{4}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{1 - \varepsilon^{p+3}} \leq \frac{4\varepsilon^{p+3}}{1 - \varepsilon^{p+3}} \leq 8\varepsilon^{p+3} \leq \varepsilon$$

e com isso obtemos o seguinte lema.

Lema 2. *O empacotamento inviável Q pode ser transformado em um empacotamento viável P tal que $V(P) \leq (1 + \varepsilon)V(Q)$.* □

Pelos Lemas 1 e 2 temos que nosso empacotamento de S tem custo no máximo $(1 + \varepsilon)$***OPT***(S).

2.2. Itens grandes

Os itens grandes são tratados de forma semelhante à descrita no PTAS unidimensional [Epstein et al. 2018], fazendo agrupamento linear dos itens grandes em $1/\varepsilon^{2p+1}$ grupos $L_1, \ldots, L_{1/\varepsilon^{2p+1}}$ de forma que $\lceil \varepsilon^{2p+1}|L| \rceil = |L_1| \geq |L_2| \geq \cdots \geq |L_{1/\varepsilon^{2p+1}}| \geq$

$|L_1| - 1$, com L_1 recebendo os maiores itens da instância, L_2 os próximos maiores itens, e assim por diante. Após isso, cria-se uma nova instância I' em que os itens pequenos continuam iguais, os itens de L_1 são descartados, e os itens grandes restantes têm seu tamanho arredondado para o tamanho do maior item de seus respectivos grupos. Seja L' o conjunto de itens grandes que tiveram seu tamanho arredondado. Como o agrupamento é feito da mesma forma que o agrupamento para o PTAS unidimensional, ainda aplicam-se os resultados de que $\mathit{OPT}(I') \leq \mathit{OPT}(I)$ e que, se acharmos uma solução ótima para I', podemos transformá-la em uma solução para I com valor no máximo $(1 + 13\varepsilon)\mathit{OPT}(I)$.

Combinamos então esse método com o empacotamento dos itens pequenos mostrado na Seção 2.1 para obter um empacotamento de $S \cup L'$. Primeiramente achamos um empacotamento ótimo para L', o que pode ser feito em tempo polinomial, já que L' contêm $1/\varepsilon^{2p+1}$ tamanhos distintos de itens, e assim podemos enumerar em tempo polinomial todas as configurações possíveis para um recipiente [Bansal et al. 2006], guardando o de menor custo. Seja B_{L_1} o primeiro recipiente dessa solução. Se $|S| \geq |B_{L_1}|/\varepsilon^3$, construímos um empacotamento de S como visto no Lema 2, e colocamos os recipientes da solução ótima de L' ao final desse empacotamento. Seja P o novo empacotamento obtido.

Lema 3. $V(P) \leq (1 + 4\varepsilon)\mathit{OPT}(S \cup L')$. □

O Lema 3 segue do fato de que a area de um item grande é pelo menos $1/\varepsilon^6$ vezes maior que a de um item pequeno, e assim um recipiente com apenas itens grandes possui no máximo ε^6 vezes a quantidade de itens que a maioria dos recipientes com apenas itens pequenos possuem. Assim, adicionar os recipientes da solução ótima de L' não aumenta muito o custo da solução para S.

Se $|S| < |B_{L_1}|/\varepsilon^3$, todos os itens de S são empacotados na área ocupada por $\lceil \varepsilon^3 |B_{L1}| \rceil$ itens grandes em B_{L_1}, dividindo essa área em áreas quadradas de lado ε^{p+3} e empacotando um item pequeno em cada uma dessas áreas. Então abrimos um novo recipiente na $1/\varepsilon$-ésima posição, e movemos os itens grandes sobrepostos para esse recipiente. Seja P o novo empacotamento obtido. Novamente, a proporção de itens grandes que aumentam de custo ao serem movidos é pequena em comparação ao total de itens na instância, e portanto obtemos o seguinte lema.

Lema 4. $V(P) \leq (1 + 2\varepsilon)\mathit{OPT}(I)$. □

Pelos Lemas 3 e 4 temos portanto que é possível empacotar $S \cup L'$ com custo no máximo $(1 + 4\varepsilon)\mathit{OPT}(I)$.

2.3. Itens médios

Para $k = 1, \ldots, 1/\varepsilon$, abrimos quatro recipientes na k/ε-ésima posição de P' para empacotar os itens de M. Todo item em recipiente após a k/ε-ésima posição tem custo de pelo menos k/ε em P', e $4k$ recipientes são abertos antes deles, portanto seu custo aumenta por um fator de no máximo $1 + 4\varepsilon$. Como abrimos $4/\varepsilon$ recipientes para empacotar os itens médios, o custo de cada um deles é no máximo $1/\varepsilon^2 + 4/\varepsilon$, portanto o custo total de empacotá-los é

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{4}{\varepsilon}\right)\varepsilon^3 n = (\varepsilon + 4\varepsilon^2)n \leq 2\varepsilon n = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^3}(1 - \varepsilon^3)n \leq 3\varepsilon V(P'),$$

e assim, obtemos o seguinte lema.

Lema 5. *Um empacotamento P' de $I \backslash M$ pode ser transformado em empacotamento P de I com $V(P) \leq (1 + 7\varepsilon)V(P')$.* □

Referências

Bansal, N., Correa, J. R., Kenyon, C., and Sviridenko, M. (2006). Bin packing in multiple dimensions: Inapproximability results and approximation schemes. *Mathematics of Operations Research*, 31(1):31–49.

Eliiyi, U. and Eliiyi, D. T. (2009). Applications of bin packing models through the supply chain. *International Journal of Business and Management Studies*, 1(1):11–19.

Epstein, L., Johnson, D. S., and Levin, A. (2018). Min-sum bin packing. *Journal of Combinatorial Optimization*, 36(2):508–531.

Epstein, L. and Levin, A. (2007). Minimum weighted sum bin packing. In *International Workshop on Approximation and Online Algorithms*, pages 218–231.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co.