

Jogos de Convexidade em Grafos Direcionados

Samuel Nascimento de Araújo^{1,2}, João Marcos Brito¹, Rudini Menezes Sampaio¹

¹Universidade Federal do Ceará (UFC)

²Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

samuel.araujo@ifce.edu.br, jmbmaluno@alu.ufc.br, rudini@dc.ufc.br

Abstract. *In 2023, Araújo et al. introduced hull game and closed hull game concepts on undirected graphs for various graph convexities, such as geodesic convexity and P_3 convexity. They demonstrated that determining the winner of these games in geodesic convexity is polynomial-time solvable in trees but is PSPACE-hard in general graphs. With the existence of convexity on directed graphs, a pertinent question arises: does the problem's complexity change with the introduction of edge orientations? In this paper, we introduce and explore convexity games on directed graphs. We establish that determining the player with a winning strategy is PSPACE-complete for both hull game and closed hull game in P_3 -convexity.*

Resumo. *Em 2023, Araújo et al. introduziram os conceitos de jogo de envoltória e jogo fechado de envoltória em grafos não direcionados, abordando várias convexidades de grafos, como geodésica e P_3 . Eles mostraram que decidir o vencedor desses jogos na convexidade geodésica é polinomial em árvores, mas é PSPACE-completo em grafos gerais. Com a existência de convexidades em grafos direcionados, surge a questão: a complexidade do problema é afetada pelas orientações das arestas? Neste artigo, introduzimos e investigamos jogos de convexidade em grafos direcionados, estabelecendo que determinar o jogador com uma estratégia vencedora é PSPACE-completo tanto para o jogo de envoltória quanto para o jogo fechado de envoltória na convexidade P_3 .*

1. Introdução

Convexidade é um tema clássico de grande interesse, explorado em várias áreas da matemática. A aplicação de convexidade em grafos é relativamente recente, por volta de 50 anos atrás. Um trabalho pioneiro nessa área foi realizado por [Erdős et al. 1972], sobre convexidades em torneios, os quais são grafos direcionados completos. Em 1984, Harary introduziu o conceito de jogos de convexidade em grafos em seu artigo “Convexity in Graphs: Achievement and Avoidance Games” [Harary 1984]. A pesquisa subsequente resultou em uma série de cinco artigos publicados entre 1985 e 2003, todos focados na convexidade geodésica de grafos não-direcionados [Buckley and Harary 1985a, Buckley and Harary 1985b, Harary 1984, Haynes et al. 2003, Nečásková 1988].

Em 2023, Araújo et al. apresentaram um breve anúncio intitulado “Complexity and winning strategies of graph convexity games”, introduzindo a noção de jogos de convexidade em grafos não-direcionados, explorando diferentes tipos de convexidade [Araújo et al. 2023]. Eles investigaram jogos usando as convexidades monofônica [Dourado et al. 2010, Duchet 1988, Farber and Jamison 1986], geodésica

[Everett and Seidman 1985, Farber and Jamison 1987] e P_3 [Barbosa et al. 2012], apresentando resultados promissores. No presente trabalho expandimos essa pesquisa para incluir grafos direcionados, visando melhorar a compreensão dos jogos de convexidade em grafos e suas implicações mais amplas. A seguir, apresentamos algumas terminologias relacionadas a esses jogos utilizadas em nossos resultados.

2. Definições

Uma *convexidade* \mathcal{C} em um grafo G é uma família de subconjuntos de $V = V(G)$ tal que $\emptyset, V \in \mathcal{C}$, e \mathcal{C} é fechada sob interseções. Ou seja, $S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ implica que $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}$. Dada uma convexidade \mathcal{C} , a *envoltória convexa* de $S \subseteq V$ é o menor membro $\text{hull}_{\mathcal{C}}(S) \supseteq S$ de \mathcal{C} . Dado uma convexidade \mathcal{C} sobre um grafo G , dizemos que um conjunto $S \subseteq V$ é *convexo* se $S \in \mathcal{C}$ e é um *conjunto de envoltória* se $\text{hull}_{\mathcal{C}}(S) = V$. A *função de intervalo* $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é tal que S é convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$. A envoltória convexa de S pode ser obtida aplicando iterativamente $I_{\mathcal{C}}(\cdot)$ até obter um conjunto convexo. As convexidades clássicas *geodésica*, *monofônica* e P_3 são definidas considerando $I_{\mathcal{C}}(S)$ como S juntamente com qualquer vértice que esteja em um caminho entre dois vértices de S , sendo esse caminho respectivamente: mínimo, induzido ou contendo exatamente três vértices.

Esses conceitos de convexidade podem ser usados tanto para grafos não direcionados, como para grafos direcionados. A Definição 2.1 amplia as definições dos jogos apresentados por [Araújo et al. 2023] para incluir grafos direcionados.

Definição 2.1. Seja D um grafo direcionado e \mathcal{C} uma convexidade sobre D . Para os jogos definidos abaixo, consideramos que um conjunto $L \subseteq V(D)$ de vértices rotulados, está inicialmente vazio. Dependendo do jogo em questão, definimos as funções $f_1(L)$ e $f_2(L)$ como apresentadas abaixo. Cada jogo envolve dois jogadores, Alice e Bob, com Alice realizando a primeira jogada. Os jogadores se alternam rotulando um vértice não rotulado que não está no conjunto formado por $f_1(L)$. Os jogadores continuam até que $f_2(L)$ seja igual ao conjunto de vértices $V(D)$, indicando o fim do jogo.

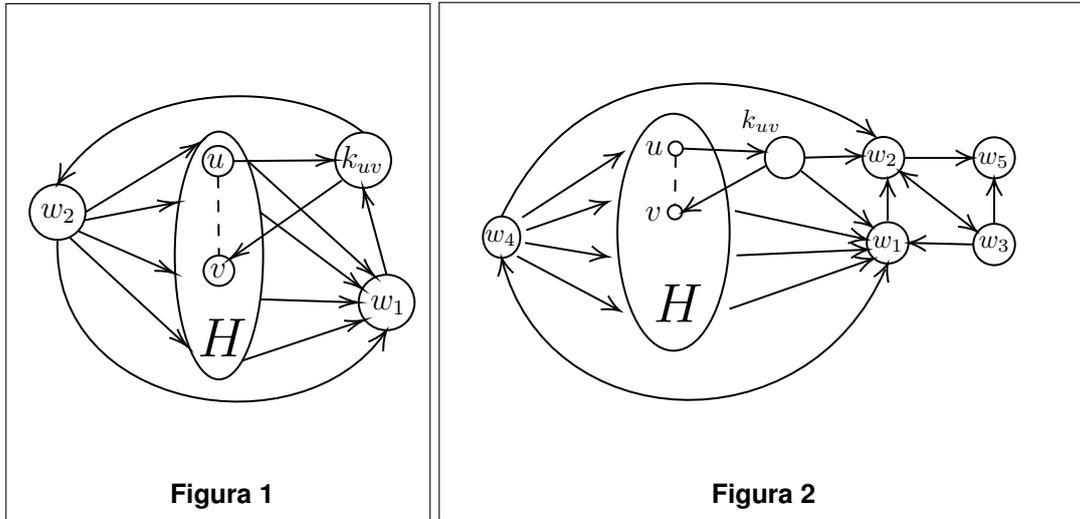
- No jogo de envoltória HG : $f_1(L) = L$ e $f_2(L) = \text{hull}_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo de intervalo IG : $f_1(L) = L$ e $f_2(L) = I_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo fechado de envoltória CHG : $f_1(L) = f_2(L) = \text{hull}_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo fechado de intervalo CIG : $f_1(L) = f_2(L) = I_{\mathcal{C}}(L)$.

Sob a convenção de *jogo normal*, o primeiro jogador que não consegue fazer uma jogada é o perdedor. Já sob a convenção de *jogo misère*, o primeiro jogador que não pode fazer uma jogada é o vencedor.

3. Complexidade dos Jogos de Convexidade em Grafos Direcionados

O teorema clássico de [Zermelo 1913], na teoria dos jogos combinatórios, estabelece que em jogos finitos com informação perfeita e sem empates, sempre existe uma estratégia vencedora para um dos jogadores. Assim, o problema de decisão nesses jogos consiste em determinar se o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

Sucintamente, a classe de complexidade PSPACE engloba problemas que podem ser resolvidos por uma máquina de Turing determinística com espaço polinomial, sendo os problemas PSPACE-Completos aqueles em que todos os problemas em PSPACE podem ser reduzidos a eles em tempo polinomial [Arora and Barak 2009].



Digrafos obtidos a partir de uma instância do jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE.

Observação 3.1. Considerando que nos jogos apresentados o número de turnos é no máximo n , e em cada turno, o número de vértices possíveis para rotular também é no máximo n , um algoritmo para computar o vencedor precisa apenas de uma quantidade polinomial de espaço. Isso implica que eles estão em PSPACE [Hearn and Demaine 2009].

Para demonstrar que as variantes normal e misère dos jogos de envoltória e do jogo fechado de envoltória são PSPACE-completas, utilizamos uma redução do jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE, conhecido por ser PSPACE-completo [Schaefer 1978].

Definição 3.2 (JOGO DE FORMAÇÃO DE CLIQUE). Dado um grafo como entrada, dois jogadores (Alice e Bob) se alternam colocando um marcador em um vértice desocupado que seja adjacente a todos os vértices já marcados. O jogador que não conseguir realizar um movimento perde a partida.

Teorema 3.3. A variante misère do jogo HG e CHG usando a convexidade P_3 é PSPACE-completa em grafos direcionados.

Demonstração. Sabemos, pela Observação 3.1, que HG e CHG estão em PSPACE. Demonstraremos que Alice possui uma estratégia vencedora em HG e CHG utilizando a convexidade P_3 se, e somente se, Bob possui uma estratégia vencedora no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE, conforme descrito na Definição 3.2.

Dada uma instância não completa H do jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE, criamos um grafo direcionado D a partir de H adicionando dois novos vértices w_1, w_2 . Para cada par $uv \notin E(H)$, introduzimos um novo vértice k_{uv} e criamos um caminho direcionado $u \rightarrow k_{uv} \rightarrow v$ em D . Adicionamos arcos $v \rightarrow w_1$ e $w_2 \rightarrow v$ para cada $v \in V(H)$. Para cada vértice k_{uv} , incluímos arcos $k_{uv} \rightarrow w_2$ e $w_1 \rightarrow k_{uv}$. Por fim, adicionamos o arco $w_2 \rightarrow w_1$. O grafo direcionado D deve ser similar à Figura 1, que ilustra os arcos entre os principais grupos de vértices, destacando H como uma elipse e mostrando exemplos de vértices k_{uv} e seus arcos, enquanto a linha tracejada indica a inexistência de uma aresta entre u e v em H .

Considere que Bob possui uma estratégia vencedora no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. A primeira jogada de Alice em HG e CHG é rotular w_2 . Essa jogada

impede que Bob rotule qualquer k_{uv} ou w_1 porque $\text{hull}(w_2, k_{uv}) = \text{hull}(w_2, w_1) = V(D)$. Consequentemente, a estratégia de Bob em HG e CHG espelha a estratégia de Alice no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. Da mesma forma, as jogadas de Alice em HG e CHG alinham-se com a estratégia de Bob no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. Assim, se Bob possui uma estratégia vencedora no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE, Alice garante a vitória em HG e CHG em D utilizando a convexidade P_3 .

Agora, consideramos o cenário em que Bob não possui uma estratégia vencedora no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. Nesse caso, a primeira jogada de Alice em HG e CHG deve evitar qualquer k_{uv} , w_1 e w_2 , caso contrário, Bob poderia jogar a estratégia de Alice no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE e vencer o HG e CHG . Portanto, podemos supor que a primeira jogada de Alice seja em um vértice v de H para seguir a estratégia vencedora do jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. Em resposta, a jogada inicial de Bob é rotular w_2 . Consequentemente, Alice deve evitar rotular qualquer k_{uv} ou w_1 já que $\text{hull}(\{w_2, k_{uv}\}) = \text{hull}(\{w_2, w_1\}) = V(D)$. Como resultado, a estratégia de Bob em ambos HG e CHG espelha a estratégia de Alice no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE. Portanto, Bob possui uma estratégia vencedora em HG e CHG , e Alice perde o jogo. \square

Teorema 3.4. A variante normal de HG e CHG utilizando a convexidade P_3 é PSPACE-completa em grafos direcionados.

Demonstração. Considere uma redução similar ao Teorema 3.3. Perceba que HG e CHG estão em PSPACE (Observação 3.1). Portanto, dado uma instância não completa do jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE, representada por H (Definição 3.2), construímos o grafo direcionado D a partir de H , adicionando cinco novos vértices w_1, w_2, \dots, w_5 e para cada par uv que não está em $E(H)$, é criado um novo vértice k_{uv} , juntamente com um caminho direcionado $u \rightarrow k_{uv} \rightarrow v$ em D . Para cada vértice v em $V(H)$, são adicionados arcos $v \rightarrow w_1$ e $w_4 \rightarrow v$; para cada vértice k_{uv} , são introduzidos os arcos $k_{uv} \rightarrow w_1$ e $k_{uv} \rightarrow w_2$; finalmente, para o subconjunto de vértices $\{w_1, w_2, \dots, w_5\}$, são criados os seguintes arcos: $w_1 \rightarrow w_2$, $w_1 \rightarrow w_4$, $w_2 \rightarrow w_3$, $w_2 \rightarrow w_5$, $w_3 \rightarrow w_1$, $w_3 \rightarrow w_2$, $w_3 \rightarrow w_5$, $w_4 \rightarrow w_1$ e $w_4 \rightarrow w_2$. Analogamente ao Teorema 3.3, o grafo direcionado D resultante deve ser semelhante à Figura 2. Afirmamos que Alice tem uma estratégia vencedora no jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE em H se e só se possui uma estratégia vencedora em HG e CHG em D .

Considere os cenários possíveis para rotular os vértices de D . Como primeira jogada, se um jogador rotular w_i , onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, esse jogador perde imediatamente porque o próximo jogador pode rotular w_5 e o jogo termina porque $\text{hull}(\{w_i, w_5\}) = V(D)$. Da mesma forma, se um jogador rotular w_5 , esse jogador perde imediatamente porque o próximo jogador pode rotular w_i , onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, alcançando o mesmo resultado, pois $\text{hull}(w_i, w_5) = V(D)$. Isso também ocorre se um jogador rotular qualquer k_{uv} , pois o próximo jogador pode rotular w_5 e o jogo termina como $\text{hull}(\{k_{uv}, w_5\}) = V(D)$.

Se um jogador rotular um vértice u de H e existir um vértice rotulado não adjacente v de H , podemos observar que o próximo jogador pode rotular w_5 , vencendo o jogo porque $\text{hull}(\{u, v, w_5\}) = V(D)$. Portanto, podemos assumir que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em H em todas as jogadas, exceto nas duas últimas. Isso corresponde diretamente ao jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUE em H . \square

Referências

- Araújo, S. N., Folz, R., de Freitas, R., and Sampaio, R. (2023). Complexity and winning strategies of graph convexity games (brief announcement). *Procedia Computer Science*, 223:394–396.
- Arora, S. and Barak, B. (2009). *Computational complexity*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Barbosa, R. M., Coelho, E. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. (2012). On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939.
- Buckley, F. and Harary, F. (1985a). Closed geodetic games for graphs. *Congressus Numerantium*, 47:131–138. Proceedings of the 16th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing.
- Buckley, F. and Harary, F. (1985b). Geodetic games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 8:321–334.
- Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2010). Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268–1274.
- Duchet, P. (1988). Convex sets in graphs, II. Minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307–316.
- Erdős, P., Fried, E., Hajnal, A., and Milner, E. (1972). Some remarks on simple tournaments. *Algebra universalis*, 2:238–245.
- Everett, M. G. and Seidman, S. B. (1985). The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3):217–223.
- Farber, M. and Jamison, R. E. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444.
- Farber, M. and Jamison, R. E. (1987). On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 66(3):231–247.
- Harary, F. (1984). Convexity in graphs: Achievement and avoidance games. In *Annals of Discrete Mathematics* (20), volume 87, page 323. North-Holland.
- Haynes, T., Henning, M., and Tiller, C. (2003). Geodetic achievement and avoidance games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 26:389–397.
- Hearn, R. and Demaine, E. (2009). *Games, Puzzles and Computation*. A. K. Peters Ltd.
- Nečásková, M. (1988). A note on the achievement geodetic games. *Quaestiones Mathematicae*, 12:115–119.
- Schaefer, T. (1978). On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225.
- Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proc. 5th Int. Congress of Mathematicians*, pages 501–504.