Coloração total equilibrada do snark Estrela Dupla

Rieli Araújo[1], Diana Sasaki[1]

[1]Instituto de Matemática (IME) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

rieli.araujo@pos.ime.uerj.br, diana.sasaki@ime.uerj.br

Abstract. *In 2016, Dantas et al. proposed the question about the existence of a Type 1 cubic graph with girth at least 5 and equitable total chromatic number 5, which motivated our result. We prove that Double Star snark have equitable total chromatic number 4, contributing as a negative evidence to this question.*

Resumo. *Em 2016, Dantas et al. levantaram o questionamento se existe um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 e que possua número cromático total equilibrado 5, o que motivou este trabalho. Nós provamos que o snark Estrela Dupla possui número cromático total equilibrado 4 contribuindo para esta questão como uma evidência negativa.*

1. Coloração total equilibrada

Uma *coloração total* de um grafo G é uma atribuição de cores tanto aos seus vértices quanto às suas arestas. Quando são atribuídas k cores aos elementos (vértices e arestas) de G, dizemos que G possui uma *k-coloração total*. O *número cromático total* de G, denotado por $\chi''(G)$, é o menor valor de k necessário para colorir todos os elementos de G sem que arestas adjacentes, ou vértices adjacentes ou vértices e arestas incidentes possuam a mesma cor. É claro ver que o $\chi''(G) \geq \Delta(G)+1$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G. Além do limite inferior, a Conjectura 1 estabelece um limite superior para o número cromático total.

Conjectura 1 (Conjectura da Coloração Total (TCC))**.** *[Vizing 1964, Behzad 1965] O número cromático total de um grafo simples $\chi''(G)$ é no máximo $\Delta(G) + 2$.*

Rosenfeld [Rosenfeld 1971] verificou que a Conjectura da Coloração Total é válida para os grafos cúbicos, que são grafos nos quais todos os vértices têm exatamente 3 arestas incidentes. Portanto, o número cromático total dos grafos cúbicos é 4 (chamados *Tipo 1*) ou 5 (chamados *Tipo 2*).

Uma coloração total é *equilibrada* quando as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1. De forma análoga ao número cromático total, o *número cromático total equilibrado*, denotado por $\chi''_e(G)$, é o menor k para o qual G possui uma k-coloração total equilibrada. O mesmo limite inferior da coloração total se aplica na coloração total equilibrada, e a Conjectura 2 estabelece um limite inferior para o número cromático total equilibrado.

Conjectura 2 (Conjectura da Coloração Total Equilibrada (ETCC))**.** *[Fu 1994] O número cromático total equilibrado de um grafo simples $\chi''_e(G)$ é no máximo $\Delta(G) + 2$.*

De forma análoga, [Wang 2002] verificou que a Conjectura da Coloração Total Equilibrada é válida para os grafos cúbicos e assim o número cromático total equilibrado destes é 4 ou 5. Existem infinitos grafos cúbicos Tipo 1 com $\chi''_e(G) = 5$ [Dantas et al. 2016].

2. O snark Estrela Dupla

Os *snarks* são grafos cúbicos, sem ponte, ciclicamente 4-aresta-conexos, com cintura pelo menos 5, e que não possuem coloração de arestas com 3 cores. Esta classe de grafos foi introduzida em 1880, por P. G. Tait em [Tait 1880]. Em 1898, J. Petersen descobriu o primeiro snark, o famoso grafo de Petersen, e a partir daí iniciou-se uma caçada por novos snarks. Em 1975, Rufus Isaacs [Isaacs 1975] definiu uma operação entre snarks para geração de novos snarks, chamada de produto interno. Como exemplo, os snarks de Blanuša são obtidos do produto interno de dois grafos de Petersen. Com alguns snarks já conhecidos, Isaacs [Isaacs 1975] descobriu famílias infinitas de snarks, e um que não pertencia a nenhuma destas famílias, chamado de Estrela Dupla (*"Double Star"*). Este é composto por 30 vértices e 45 arestas, e está apresentado na Figura 1.

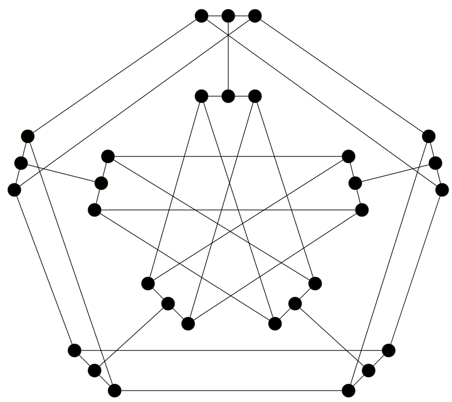

Figura 1. Snark Estrela Dupla.

3. Resultado

Nosso estudo foi motivado pela questão proposta por [Dantas et al. 2016] acerca da existência de um grafo cúbico Tipo 1, com cintura de pelo menos 5 e que possua o número cromático total equilibrado 5.

Os snarks de Petersen, Celmins-Swart 1 e Celmins-Swart 2 são snarks com cintura 5 e com menos que 30 vértices que sabemos que possuem 4-colorações totais equilibradas. Em 2011, Campos et al. [Campos et al. 2011] mostraram que todos os membros da família infinita Snark Flor ("*Flower snark*") possuem 4-colorações totais e estas são equilibradas. Em 2014, Sasaki et al. [Sasaki et al. 2014] mostraram que todos os membros das duas famílias infinitas de Blanuša possuem 4-colorações totais equilibradas. Em 2016, Dantas et al. [Dantas et al. 2016] provaram que todos os membros da família infinita de Goldberg possuem 4-colorações totais equilibradas. Em 2017, Cordeiro et al. [Cordeiro et al. 2017] provaram que todos os membros da primeira família infinita dos snarks de Loupekine possuem 4-colorações totais equilibradas. Por fim, em

2023, as autoras [Araújo and Sasaki 2023] apresentaram 4-colorações totais equilibradas para todos os membros da segunda família infinita dos snarks de Loupekine.

Neste trabalho, verificamos que o snark Estrela Dupla possui uma 4-coloração total equilibrada, contribuindo assim de forma negativa para a questão motivadora e resultando no Teorema 1, apresentado a seguir.

Teorema 1. *O snark Estrela Dupla possui número cromático total equilibrado 4.*

Ideia da prova Na pesquisa conduzida por Cavicchiolli et al. [Cavicchioli et al. 2003] em 2003, foi mostrado que todo snark com até 30 vértices é Tipo 1, portanto temos que o snark Estrela Dupla possui uma 4-coloração total. Provamos que é possível colorir este mesmo grafo com uma 4-coloração total equilibrada. Para tanto, considere c_1, c_2, c_3, c_4 as classes de cores usadas na coloração total do grafo. Este snark possui 75 elementos entre vértices e arestas, e obtemos uma coloração total equilibrada com classes de cores c_1, c_2, c_3, c_4 possuindo cardinalidades iguais a 19, 19, 19 e 18, respectivamente. Na Figura 1 é apresentada esta 4-coloração total equilibrada.

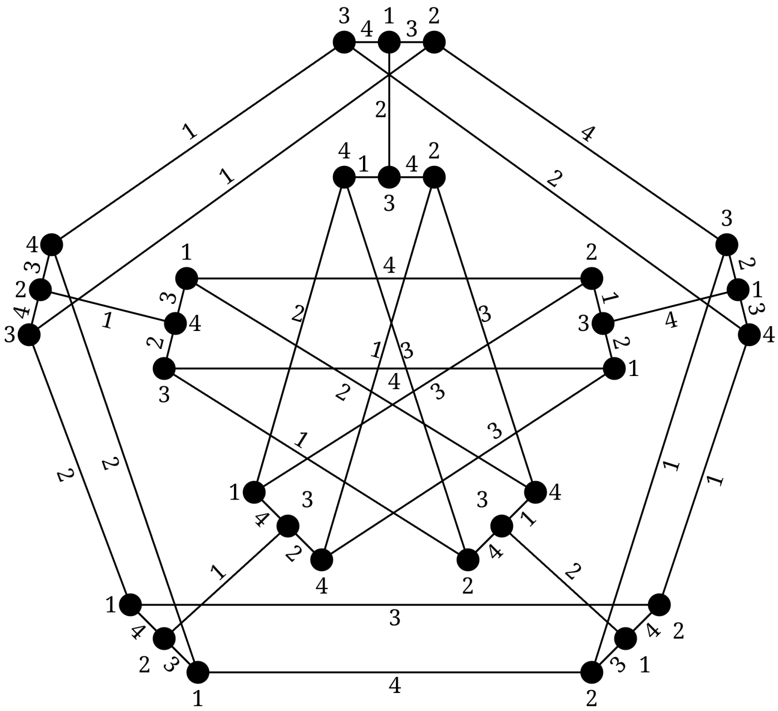

Figura 2. Snark Estrela Dupla com uma coloração total equilibrada com 4 cores.

4. Conclusão

Este trabalho apresenta uma 4-coloração total equilibrada do snark Estrela Dupla. Como trabalhos futuros, iremos investigar a coloração total equilibrada dos snarks obtidos através do produto interno de snarks, proposto por Isaacs [Isaacs 1975].

Referências

Araújo, R. and Sasaki, D. (2023). Coloraçao total equilibrada dos snarks de loupekine. In *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação*, pages 20–24. SBC.

Behzad, M. (1965). *Graphs and Their Chromatic Numbers*. PhD thesis, Michigan State University, Michigan.

Campos, C., Dantas, S., and de Mello, C. (2011). The total-chromatic number of some families of snarks. *Discrete Math.*, 311:984–988.

Cavicchioli, A., Murgolo, T., Ruini, B., and Spaggiari, F. (2003). Special classes of snarks. *Acta Applicandae Mathematica*, 76:57–88.

Cordeiro, L., Dantas, S., and Sasaki, D. (2017). On equitable total colouring of loupekine snarks and their products. *Mat. Cont.*, 45:77–85.

Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., Mazzuoccolo, G., Preissman, M., dos Santos, V. F., and Sasaki, D. (2016). On the equitable total chromatic number of cubic graphs. *Discrete Appl. Math.*, 209:84–91.

Fu, H.-L. (1994). Some results on equalized total coloring. *Congressus numerantium*, pages 111–120.

Isaacs, R. (1975). Loupekhine's snarks: A bi-family of non-tait-colorable graphs. *Tec. Report*.

Rosenfeld, M. (1971). On the total chromatic number of a graph. *Israel J. Math*, pages 396–402.

Sasaki, D., Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., Mazzuoccolo, G., and Preissman, M. (2014). The hunting of a snark with total chromatic number 5. *Discrete Appl. Math.*, 164:470–481.

Tait, P. G. (1878-1880). Remarks on the colouring of maps. In *Proceedings of the RSE*, pages 501–503, 729, Edinburgh, Scotland.

Vizing, V. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, pages 25–30.

Wang, W. (2002). Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3. *Graphs Comb*, 18:677–685.