Complexidade de alguns parâmetros na convexidade de ciclos*

Carlos V.G.C. Lima[1], Thiago Marcilon[1], Pedro Paulo de Medeiros[2]

[1]Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri
Juazeiro do Norte – CE – Brasil

[2]Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará
Fortaleza – CE – Brasil

{vinicius.lima,thiago.marcilon}@ufca.edu.br, pedropmed@alu.ufc.br

Abstract. *The subject of graph convexity is well explored in the literature, the so-called interval convexities above all. In this work, we explore the cycle convexity, whose interval function is $I(S) = S \cup \{u \mid G[S \cup \{u\}]$ has a cycle containing $u\}$. In this convexity, we prove that the decision problems associated to the parameters rank and convexity number are in* NP*-complete and* W[1]*-hard when parameterized by the solution size. We also prove that to determine whether the percolation time of a graph is at least k is* NP*-complete, but polynomial for cacti or when $k \leq 2$.*

Resumo. *O conceito de convexidade em grafos é bastante explorado na literatura, principalmente as chamadas convexidades de intervalo. Neste trabalho, exploramos a convexidade de ciclos, cuja função de intervalo é $I(S) = S \cup \{u \mid G[S \cup \{u\}]$ possui um ciclo contendo $u\}$. Nessa convexidade, provamos que os problemas de decisão atrelados aos parâmetros* rank *e número de convexidade são problemas* NP*-completos e* W[1]*-difíceis quando parametrizados pelo tamanho da solução. Provamos também que determinar se o tempo de percolação é pelo menos k é* NP*-completo, porém polinomial para cactos ou quando $k \leq 2$.*

1. Introdução

Uma convexidade [Farber and Jamison 1986, Harary and Nieminen 1981] é um par ordenado $(V, \mathcal{C})$, onde V é um conjunto, chamado de *espaço de convexidade*, e $\mathcal{C}$ é uma família de subconjuntos de V, chamados de *conjuntos convexos*, satisfazendo as seguintes propriedades: **(i)** $V, \emptyset \in \mathcal{C}$; e **(ii)** $\mathcal{C}$ é fechada para a interseção. Um possível espaço de convexidade é definido pelos vértices de um grafo, neste caso se tratando de uma convexidade em grafos [Harary and Nieminen 1981]. Em uma convexidade, a família $\mathcal{C}$ pode ser definida a partir de uma *função de intervalo* $I : V \to V$, de modo que $S \in \mathcal{C}$ se e somente se S é *ponto fixo* de I, ou seja, $I(S) = S$. Nesse caso, chamamos a convexidade em questão de *convexidade de intervalo*. Cada função de intervalo I define um tipo diferente de convexidade de intervalo em grafos. Dentre as mais estudadas estão a convexidade geodésica [Pelayo 2013], a convexidade P_3 [Bollobás and Riordan 2006] e a convexidade monofônica [Farber and Jamison 1986]. A convexidade que investigaremos neste trabalho é a convexidade de ciclos [Araujo et al. 2018], cuja função de intervalo $I(S)$ contém S

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e projeto Universal CNPq [422912/2021-2].

e todos os vértices u tais que $G[S \cup \{u\}]$ possui um ciclo que contém u, onde $G[X]$ é o subgrafo de G induzido pelos vértices em X.

Dada uma convexidade de intervalo em um grafo $G = (V, E)$, a *envoltória convexa* de $S \subseteq V$ é o maior conjunto convexo $H(S)$ que contém S, ou seja, $H(S) = I^k(S)$, tal que $I^{k+1}(S) = I^k(S)$, onde $I^0(S) = S$ e $I^k(S) = I(I^{k-1}(S))$, para $k \geq 1$. Dizemos que S é um *conjunto de envoltória* se $H(S) = V$. Com isso, podemos definir vários parâmetros relacionados às convexidades em grafos, como o *número de convexidade* [Chartrand and Zhang 1999], denotado por $c(G)$, que consiste no tamanho de um maior subconjunto próprio convexo de V, o *rank* [Dourado et al. 2022], denotado por $r(G)$, que consiste no tamanho de um maior conjunto $S \subseteq V$ tal que não existe $v \in S$ onde $v \in H(S \setminus \{v\})$, e o *tempo de percolação* [Benevides et al. 2015], denotado por $pn(G)$, que consiste no maior inteiro k tal que existe um conjunto de vértices S onde $I^{k-1}(S) \neq I^k(S) = V$.

As demais seções estão organizadas da seguinte forma: na Seção 2, mostramos que os problemas computacionais que consistem em determinar se $c(G) \geq k$ e $r(G) \geq k$ são NP-completos e W[1]-difíceis, quando parametrizados por k. Na Seção 3, apresentamos dois algoritmos polinomiais, o primeiro computa $pn(G)$ quando G é um cacto, que é a classe composta pelos grafos conexos G tais que qualquer par de ciclos de G tem no máximo um vértice em comum, e o segundo determina se $pn(G) \geq 2$. Também mostramos que determinar se $pn(G) \geq k$, para qualquer $k \geq 9$ fixo, é NP-completo.

2. Resultados nos parâmetros *rank* e número de convexidade

Nesta seção, trabalharemos com os parâmetros *rank* e número de convexidade, provando a NP-completude e W[1]-dificuldade dos problemas consistindo em determinar se $r(G) \geq k$ e se $c(G) \geq k$, quando parametrizados por k, na convexidade de ciclos.

Teorema 1. *Determinar se $r(G) \geq k$ é* NP*-completo e* W*[1]-difícil parametrizado por k.*

Demonstração. Seja $mif(G)$ o tamanho de um maior subconjunto de vértices de G que induz uma floresta. Para qualquer grafo G, temos que $r(G) = mif(G)$, pois podemos ver que um subconjunto de vértices S de um grafo G é tal que, para todo $v \in S$, $v \notin H(S \setminus \{v\})$ se e somente se S não induz nenhum ciclo em G. Com isso, o teorema segue do fato, provado por Jaffke *et al.* [Jaffke et al. 2020], de que determinar se $mif(G) \geq k$ é NP-completo e W[1]-difícil quando parametrizado por k. □

Teorema 2. *Determinar se $c(G) \geq k$ é* NP*-completo e* W*[1]-difícil parametrizado por k.*

Ideia da prova. Podemos checar se um conjunto é ou não convexo em tempo polinomial na convexidade de ciclos, logo o problema está em NP. Apresentaremos uma redução parametrizada, porém também de tempo polinomial, a partir do problema CONJUNTO INDEPENDENTE parametrizado no parâmetro k, o qual é W[1]-completo [Cygan et al. 2015]. Dada $(G = (V, E), k)$ uma instância de CONJUNTO INDEPENDENTE, onde podemos supor que exista pelo menos uma aresta em G, construímos um novo grafo $G' = (V', E')$ da seguinte forma: **(i)** fazemos $V \subseteq V'$ e $E \subseteq E'$; **(ii)** adicionamos um vértice x a G' e, para cada $uv \in E$, adicionamos um par de vértices x^1_{uv}, x^2_{uv} e as arestas $ux^1_{uv}, vx^1_{uv}, ux^2_{uv}, vx^2_{uv}$ a G'. Seja X o conjunto de vértices adicionados neste passo; **(iii)** adicionamos arestas em G' de modo que os vértices adicionados no passo anterior formem uma clique em G'.

A construção apresentada tem complexidade polinomial, visto que a quantidade de vértices e arestas é polinomial no tamanho de G. É possível provar que (G, k) é uma instância SIM de CONJUNTO INDEPENDENTE se e somente se $c(G') \geq k + 1$ a partir dos fatos de que, se S é um conjunto independente de G, $S \cup \{x\}$ é um conjunto convexo de G' e, se S é um conjunto convexo de G', então $|S \cap X| \leq 1$ e $S \setminus X$ é um conjunto independente de G. □

3. Resultados no parâmetro tempo de percolação

Nesta seção, trabalharemos com o parâmetro tempo de percolação. Provamos que o problema de determinar se $pn(G) \geq k$ é NP-completo mesmo para qualquer $k \geq 9$ fixo, porém é polinomial quando G é um cacto ou para qualquer $k \leq 2$ fixo.

Seja G um cacto com ao menos um ciclo. Definimos o grafo $T_G = (\mathcal{C}, A)$ *subjacente* a G de forma que cada nó em $\mathcal{C}$ é um ciclo de G e $C_1C_2 \in A$ se e somente se $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. Dizemos que um ciclo é terminal se ele possui no máximo uma articulação. Defina ainda $lp(G)$ como o maior caminho induzido de G. Com isso, um algoritmo linear que determina $pn(G)$ quando G é um cacto vem como consequência dos dois seguintes resultados.

Lema 3. *Dado um cacto G, podemos calcular $lp(T_G)$ em tempo linear no tamanho de G.*
Lema 4. *Seja G um cacto com ao menos um ciclo. Temos que $pn(G) = lp(T_G) + 1$.*

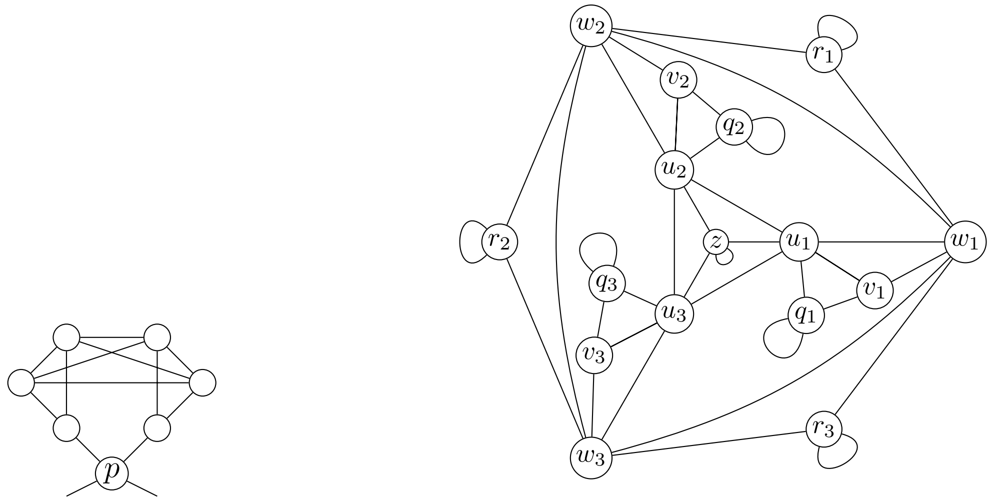
Ideia da prova. A ideia principal dessa demonstração é a de que, dado um maior caminho induzido $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ em $T_G = (\mathcal{C}, A)$, conseguimos obter um conjunto de envoltória S de G de modo que existe um vértice em $V(C_{t+1}) \cap V(C_t)$ que também está em $I^{t+1}(S) \setminus I^t(S)$, para $0 \leq t < k$, e, adicionalmente, um vértice em $V(C_k) \setminus V(C_{k-1})$ que também está em $I^{k+1}(S) \setminus I^k(S)$. □

Seja $G = (V, E)$ um grafo e vértices adjacentes $v, w \in V$. Definimos $R_G(v, w)$ como o conjunto de todos os subgrafos de G induzidos por um conjunto $A \cup B$, onde $G[A]$ é um ciclo sem cordas que contém a aresta vw e $G[B]$ é um ciclo que contém w e não contém v, tal que v tem no máximo um vizinho em $B \setminus \{w\}$. A corretude do algoritmo de complexidade cúbica para determinar se $pn(G) \geq 2$ segue dos dois seguintes lemas.

Lema 5. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Existem vértices v e w vizinhos em G tais que $R_G(v, w) \neq \varnothing$ se e somente se existe um conjunto $S \subseteq V$, tal que $I^2(S) \setminus I(S) \neq \varnothing$. Adicionalmente, S pode ser computado em tempo linear.*
Lema 6. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo, $v \in V$ e $Q \subseteq V$. Se $v \in I^2(Q) \setminus I(Q)$, então existe um conjunto de envoltória $S \supseteq Q$ de G, tal que $v \in I^2(S) \setminus I(S)$ e tal que S pode ser computado em tempo cúbico.*

Mostraremos agora o resultado de NP-completude.
Teorema 7. *Determinar se $pn(G) \geq k$ é NP-completo para todo $k \geq 9$ fixo.*

Ideia da prova. O problema está em NP, pois um conjunto de envoltória S de um grafo G, tal que $I^{k-1}(S) \neq V(G)$, é um certificado válido para a instância (G, k) do problema que pode ser verificado em tempo polinomial.



(a) ***Gadget*****.**

(b) ***Gadget*** **da cláusula C_i, onde cada loop representa o** ***gadget*** **da Fig. 1a e o vértice p da Fig. 1a é o vértice visível no grafo. Os sobrescritos foram omitidos.**

Figura 1. ***Gadgets*** **usados na prova do Teorema 7.**

A seguir, vamos mostrar uma redução polinomial a partir do problema 3-SAT para $k = 9$ fixo. Seja φ uma instância de 3-SAT. Vamos denotar o conjunto de cláusulas de φ por $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, onde $C_i = \{\ell_1^i, \ell_2^i, \ell_3^i\}$ é o conjunto de literais da i-ésima cláusula de φ, e o conjunto de variáveis de φ por $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Considere a construção a seguir para obter um grafo G a partir de φ: **(i)** Para cada cláusula C_i, construímos o *gadget* da Fig. 1b, onde os loops nos vértices $q_1^i, q_2^i, q_3^i, r_1^i, r_2^i, r_3^i$ e z^i representam o *gadget* da Fig. 1a, com cada um desses vértices na posição do vértice p da Fig. 1a. Seja V_i o conjunto de vértices no *gadget* da cláusula C_i; **(ii)** para cada par de literais ℓ_a^i e ℓ_b^j opostos de uma mesma variável, adicione os vértices $y_{i,a,j,b}$ e $y'_{i,a,j,b}$. Forme um K_3 com os vértices w_a^i, w_b^j e $y_{i,a,j,b}$ e adicione um *gadget* da figura Fig. 1a com $y'_{i,a,j,b}$ na posição do vértice p da Fig. 1a. Seja Y o conjunto dos vértices $y_{i,a,j,b}$ e Y' o conjunto dos vértices $y'_{i,a,j,b}$ adicionados nesse passo; e **(iii)** adicione um vértice x e, para cada par de vértices $y_{i,a,j,b}$ e $y'_{i,a,j,b}$, forme um K_3 com os vértices $y_{i,a,j,b}, y'_{i,a,j,b}$ e x.

A construção possui um número polinomial de vértices e arestas em relação ao tamanho de φ e, pela definição acima, a construção tem complexidade polinomial. Temos que φ é satisfatível se e somente se existe um conjunto de envoltória S de G tal que $I^8(S) \neq V(G)$. Dada uma atribuição que satisfaz φ, o conjunto S é um conjunto de envoltória de G tal que $x \notin I^8(S)$. Por outro lado, dado um conjunto de envoltória minimal de G, é possível mostrar que ele possui dois vértices de cada *gadget* da Fig. 1a e um vértice de cada conjunto $U_i = \{u_1^i, u_2^i, u_3^i, v_1^i, v_2^i, v_3^i\}$, e que apenas x pode não estar em $I^8(S)$. Para termos $x \notin I^8(S)$, precisamos que $Y \subseteq I^8(S) \setminus I^7(S)$ e, consequentemente, que cada par de vértices w_a^i e w_b^j seja tal que ambos não podem estar em $I^6(S)$.

Assim, a seguinte atribuição de valores para as variáveis em $\mathcal{X}$ é bem definida e satisfaz φ: para cada w_a^i, se $w_a^i \in I^6(S)$, fazemos a variável X_k correspondente ao literal ℓ_a^i assumir o valor verdadeiro se e somente se $\ell_a^i = X_k$; e, se, após efetuar essas atribuições, restar alguma variável ainda sem atribuição de valor, faça ela receber valor verdadeiro. Por fim, para conseguirmos uma redução para qualquer $k > 9$ fixo, podemos estender a redução a partir do vértice x. $\square$

Referências

Araujo, J., Ducoffe, G., Nisse, N., and Suchan, K. (2018). On interval number in cycle convexity. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 20(1):1–28.

Benevides, F., Campos, V., Dourado, M. C., Sampaio, R. M., and Silva, A. (2015). The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: Algorithmic aspects. *European Journal of Combinatorics*, 48:88–99.

Bollobás, B. and Riordan, O. (2006). *Percolation*. Cambridge University Press.

Chartrand, G. and Zhang, P. (1999). Convex sets in graphs. *Congr. Numer.*, 136:19–32.

Cygan, M., Fomin, F. V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., and Pilipczuk, M. (2015). *Parameterized Algorithms*. Springer, 1st edition.

Dourado, M. C., Ponciano, V. S., and da Silva, R. L. O. (2022). On the monophonic rank of a graph. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 24, no 2.

Farber, M. and Jamison, R. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 7:433–444.

Harary, F. and Nieminen, J. (1981). Convexity in graphs. *J. Differ. Geom.*, 16(2):185–190.

Jaffke, L., Kwon, O., and Telle, J. (2020). Mim-width ii. the feedback vertex set problem. *Algorithmica*, 82:118–145.

Pelayo, I. (2013). *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer.