Conjunto dominante independente aberto (OIND set) em produto lexicográfico de grafos

Lauane M. O. de Moraes, Erika M. M. Coelho

[1]Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Campus Samambaia – Goiânia – GO – Brazil

lauanemateus@discente.ufg.br, erikamorais@inf.ufg.br

Abstract. *For a graph $G = (V(G), E(G))$, a set $S \subseteq V(G)$ is an open-independent dominating set, or OIND set, if for every $v \in S$, we have $|N(v) \cap S| \leq 1$, and for every $v \in V(G)$, we have $|N[v] \cap S| \geq 1$. The minimum cardinality of the OIND set of G is denoted by $\gamma_{oind}(G)$. We present some results for $\gamma_{oind}(G)$ in simple classes of graphs and, given the lexicographic product of two graphs G and H, denoted by $G \circ H$, we show bounds for $\gamma_{oind}(G \circ H)$.*

Resumo. *Para um grafo $G = (V(G), E(G))$, um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um conjunto dominante independente aberto, ou conjunto OIND, se para todo $v \in S$, temos que $|N(v) \cap S| \leq 1$, e para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap S| \geq 1$. A cardinalidade mínima do conjunto OIND de G é denotada por $\gamma_{oind}(G)$. Neste trabalho mostramos alguns resultados para $\gamma_{oind}(G)$ em classes simples de grafos e, dado o produto lexicográfico de dois grafos G e H, denotado por $G \circ H$, nós mostramos limites para $\gamma_{oind}(G \circ H)$.*

1. Introdução

Considere um cenário de instalações de redes de multiprocessadores que possuam dispositivos de detecção de vírus para monitar possíveis ataques ao sistema. O objetivo é determinar o menor número de dispositivos a serem instalados em alguns pontos da rede de modo a monitorar a presença de algum vírus. Dependendo da necessidade é importante que os detectores possam ter outros vizinhos detectores, o que seria útil em aplicações em que um ponto na rede não consegue detectar algum vírus em si próprio. Esse cenário é um exemplo de aplicação de conjuntos dominantes e suas variações.

Neste trabalho vamos considerar grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo G, o conjunto de vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto dominante* se todo vértice de $V \setminus S$ é adjacente a pelo menos um vértice em S, ou seja, para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap S| \geq 1$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *dominante aberto* se para todo $v \in V(G)$, $|N(v) \cap S| \geq 1$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* quando não possui vizinhos pertencentes a S, ou seja, para todo $v \in S$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. Já S é um conjunto *independente aberto* se para todo $v \in S$, $|N(v) \cap S| \leq 1$.

Um conjunto que é ao mesmo tempo dominante e independente é um *conjunto dominante independente*. A cardinalidade mínima de um conjunto dominante independente é chamada de *número de dominação independente* e é denotada por $i(G)$. O número de dominação independente foi introduzido por [Cockayne and Hedetniemi 1974] e

[Cockayne and Hedetniemi 1977]. Um conjunto que é dominante e independente aberto é chamado um *conjunto dominante independente aberto* ou conjunto *OIND* . O nosso interesse é determinar um conjunto OIND de cardinalidade mínima, denotado por $\gamma_{oind}(G)$. Observe que o subgrafo induzido por um conjunto dominante independente gera componentes K_1 e o subgrafo induzido por um conjunto OIND gera componentes K_1 ou K_2. Dessa forma, um conjunto dominante independente também é um conjunto OIND, mas não se pode afirmar o contrário. Ademais, todo grafo admite algum conjunto OIND e $\gamma_{oind}(G) \leq i(G)$. Conjuntos OINDs foram introduzidos por [Seo and Slater 2017] e poucos resultados foram estabelecidos até o momento. Em 2019, o trabalho de [Melo and Coelho 2019] apresentou apenas limites superiores de $\gamma_{oind}(G)$ para classes simples, a citar K_n, C_n, P_n, e resultados para o produto lexicográfico entre classes restritas de grafos.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *dominante aberto e independente aberto*, ou conjunto *dominante emparelhado induzido* se para todo $v \in S$, $|N(v) \cap S| \leq 1$ e todo $v \in V(G)$, $|N(v) \cap S| \geq 1$. O subgrafo induzido pelo conjunto S gera componentes K_2. Denotamos a cardinalidade mínima de um conjunto dominante emparelhado induzido por $\gamma^{ip}(G)$. Note que nem todo grafo admite conjunto dominante emparelhado induzido, a exemplo o grafo C_5. Neste trabalho analisamos conjuntos OIND no produto lexicográfico de dois grafos e relacionamos o número $\gamma_{oind}(G \circ H)$ com $\gamma^{ip}(G)$. O *produto lexicográico* de G por H, denotado por $G \circ H$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ e conjunto de arestas $E(G \circ H) = \{(g_i, h_j)(g_k, h_l) \mid g_i g_k \in E(G),$ ou $g_i = g_k$ e $h_j h_l \in E(H)\}$. Veja a Figura 1 para um exemplo. Existem muitos resultados sobre conjuntos dominantes e suas variações em produto lexicográfico de dois grafos [Gözüpek et al. 2017, Maheswari and Parvathi 2017, Sitthiwirattham 2013, Zhang et al. 2011].

Nossa contribuição. Nós mostramos alguns resultados de $\gamma_{oind}(G)$ para algumas classes de grafos mais restritas e dado o produto lexicográfico $G \circ H$ de dois grafos G e H, nós mostramos limites de $\gamma_{oind}(G \circ H)$. Mais especificamente, provamos algumas igualdades para $\gamma_{oind}(G \circ H)$ quando restringimos o número de vértices de G e apresentamos limites considerando $\gamma^{ip}(G)$ e γ_{oind} de G e H separadamente.

Notação e terminologia. Para um grafo G e um grafo H, vamos considerar $V(G) = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ e $V(H) = \{h_1, h_2, ..., h_m\}$. A *vizinhança aberta* de um vértice $v \in V(G)$ é $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$, e sua *vizinhança fechada* é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Para $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o subgrafo de G induzido por S. Um vértice $v \in V(G)$ é um *vértice universal* se $N[v] = V(G)$. Para o produto lexicográfico $G \circ H$, consideraremos o conjunto $X_i = \{(g_i, h_j) \in V(G \circ H) : 1 \leq j \leq m\}$ e a componente G_i, definida como o subgrafo de $G \circ H$ induzido por X_i, ou seja $G_i = (G \circ H)[X_i]$. A Figura 1 mostra um grafo $G \circ H$ e sua representação com as componentes $G_i's$. As arestas tracejadas representam que há arestas entre todos os vértices das respectivas componentes.

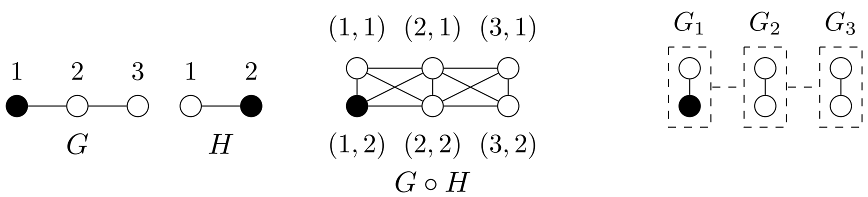

Figura 1: dois grafos G e H, o produto lexicográfico e suas componentes

2. Resultados

Nosso primeiro resultado determina $\gamma_{oind}(G)$ quando G possui vértice universal.

Proposição 1. *Um grafo G possui vértice universal se e somente se* $\gamma_{oind}(G) = 1$.

Demonstração. O vértice u é um vértice universal se e somente se $|N[u]| = |V(G)|$. Além disso, $|N(u) \cap \{u\}| \leq 1$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $|N[v] \cap \{u\}| \geq 1$ se e somente se $\{u\}$ é um conjunto OIND. Portanto $\gamma_{oind}(G) = 1$. □

Nos próximos dois teoremas, determinamos γ_{oind} para algumas classes simples de grafos: grafos bipartidos completos, caminhos e ciclos.

Teorema 1. *Seja $K_{n,m}$ um grafo bipartido completo. Se $K_{n,m}$ não possui vértice universal, então $\gamma_{oind}(K_{n,m}) = 2$.*

Teorema 2. *Seja $G = C_n$ ou $G = P_n$, então $\gamma_{oind}(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Os próximos resultados estão relacionados ao produto lexicográfico $G \circ H$. Começaremos investigando casos especiais e, no fim dessa seção, generalizaremos para casos gerais.

Teorema 3. *Se $\gamma_{oind}(H) = 1$, então $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(G)$.*

Demonstração. Considere D um conjunto OIND tal que $\gamma_{oind}(G \circ H) = |D|$, e G_i a componente i do grafo G. Desde que $\gamma_{oind}(H) = 1$, pela Proposição 1, sabemos que H possui um vértice universal e que, por isomorfismo, G_i também possui vértice universal. Vamos provar que para todo i, $|V(G_i) \cap D| = 1$. Suponha, por contradição, que para algum i, $|V(G_i) \cap D| > 1$. Agora, vamos definir um conjunto OIND D' tal que $|D'| < |D|$. Considere $(g_u, h_v) \in V(G_i)$ um vértice universal tal que $|D \cap V(G_i)| > 1$. Escolha exatamente um vértice (g_u, h_v) de cada componente, caso ele exista, para fazer para fazer parte do conjunto D'. Observe que para todo vértice $(g_i, h_l) \in D'$, temos que $|N((g_i, h_l)) \cap D'| \leq 1$, e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, temos que $|N[(g_i, h_l)] \cap D'| \geq 1$. Logo, D' é um conjunto OIND. Desde que, existe pelo menos uma componente G_i, tal que $|V(G_i) \cap D| > 1$, temos que $|D'| < |D|$. Uma contradição. Logo, todo conjunto mínimo OIND D satisfaz que, para todo i, $|V(G_i) \cap D| = 1$. Por definição de conjunto OIND, sabemos que para todo $(g_i, h_l) \in D$, $|N((g_i, h_l)) \cap D| \leq 1$, e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, $|N[(g_i, h_l)] \cap D| \geq 1$. Considere o conjunto $S = \{g_i | (g_i, h_l) \in D\}$. Por construção de D, sabemos que para todo $g_i \in S$, $|N(g_i) \cap D| \leq 1$, e para todo $g_i \in V(G)$, $|N[g_i] \cap D| \geq 1$. Portanto, S é um conjunto OIND de G e $\gamma_{oind}(G \circ H) \geq \gamma_{oind}(G)$.

Agora, considere S_1 um conjunto OIND de G tal que $\gamma_{oind}(G) = |S_1|$ e considere $S_2 = \{h_1\}$ um conjunto OIND de H tal que $\gamma_{oind}(H) = |S_2|$. Construa um conjunto $D'' = \{(g_i, h_1) | (g_i, h_1) \in V(G \circ H)$ e $g_i \in S_1\}$. Por construção D'' é um conjunto OIND de $G \circ H$ e $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G)$. □

Nos três resultados seguintes, abordaremos mais alguns casos especiais para achar a cardinalidade mínima do conjunto OIND do produto lexicográfico $G \circ H$ quando G está restrito em relação à sua quantidade de vértices.

Proposição 2. *Se* $|V(G)| = 1$*, então* $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(H)$.

Demonstração. Se $|V(G)| = 1$, então, por definição de produto lexicográfico, $G \circ H$ é isomorfo a H. Logo, $\gamma_{oind}(G \circ H) = \gamma_{oind}(H)$. $\square$

Teorema 4. *Se* $|V(G)| = 2$ *ou* $|V(G)| = 3$*, então* $\gamma_{oind}(G \circ H) = \min(\gamma_{oind}(H), 2)$.

Por fim, os últimos dois teroremas dizem respeito a resultados gerais. No próximo resultado, dado o produto lexicográfico $G \circ H$, associamos a cardinalidade mínima do conjunto OIND de $G \circ H$ com a cardinalidade mínima do conjunto dominante emparelhado induzido de G.

Teorema 5. *Se G admite conjunto dominante emparelhado induzido, com* $|V(G)| > 3$*, e* $\gamma_{oind}(H) > 1$*, então* $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma^{ip}(G)$.

Demonstração. Seja G um grafo simples com n vértices, D um conjunto dominante emparelhado induzido, tal que $|D| = \gamma^{ip}(G)$, e G_i a componente i do grafo $G \circ H$. Construa o conjunto $D' = \{(g_i, h_1) \in V(G_i) | g_i \in D\}$. Nós vamos mostrar que D' é um conjunto OIND do produto lexicográfico $G \circ H$. Dado que D é um conjunto dominante emparelhado induzido de G, então sabemos que $|N(g_k) \cap D| \geq 1$, para todo $g_k \in V(G)$ e $|N(g_i) \cap D| \leq 1$, para todo $g_i \in D$. Assim, por construção de D', $|N((g_k, h_l)) \cap D'| \geq 1$, para todo $(g_k, h_l) \in G \circ H$, o que resulta em $|N[(g_k, h_l)] \cap D'| \geq 1$, para todo $(g_k, h_l) \in G \circ H$. Além disso, $|N((g_i, h_l)) \cap D'| \leq 1$, para todo $(g_i, h_l) \in D'$. Logo, $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma^{ip}(G)$. $\square$

Teorema 6. $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$.

Demonstração. Considere S_1 um conjunto OIND de G tal que $\gamma_{oind}(G) = |S_1|$ e considere S_2 um conjunto OIND de H tal que $\gamma_{oind}(H) = |S_2|$. Agora construa um conjunto $D = \{(g_i, h_l) \in V(G \circ H) \mid |N(g_i) \cap S_1| = 0 \text{ e } g_i \in S_1 \text{ e } h_l \in S_2\} \cup \{(g_i, h_1) \in V(G \circ H) \mid |N(g_i) \cap S_1| = 1 \text{ e } g_i \in S_1\}$. Por construção de D, observe que para todo vértice $(g_i, h_l) \in D$, temos que $|N((g_i, h_l)) \cap D| \leq 1$ e para todo $(g_i, h_l) \in V(G \circ H)$, temos que $|N[(g_i, h_l)] \cap D| \geq 1$. Logo D é um conjunto OIND de $G \circ H$.

Considere G_i a componente i do grafo $G \circ H$. Construa o conjunto $A = \{G_k || V(G_k) \cap D| \geq 1\}$. Observe que A contém somente componentes de $G \circ H$ que contenham ao menos um vértice de D. Dessa forma, a construção mostra que $|V(G_k) \cap D| \leq |S_2|$, uma vez que G_k é isomorfo a H. Além disso, por construção, temos que $|A| = |S_1|$. Assim, como $\cup_{k=1}^{|A|} V(G_k) \cap D = D$, temos que $|D| = |A| \cdot |V(G_k) \cap D| \leq |S_1| \cdot |S_2| \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. Portanto, $\gamma_{oind}(G \circ H) \leq \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. $\square$

Note que há casos no qual $\gamma_{oind}(G \circ H) < \gamma_{oind}(G) \cdot \gamma_{oind}(H)$. Considere os grafos $G = P_6$ e $H = P_9$, observe que $\gamma_{oind}(P_6) = 2$ e $\gamma_{oind}(P_9) = 3$, enquanto que $\gamma oind(G \circ H) = 4 < 2 \cdot 3 = 6$.

Referências

Cockayne, E. J. and Hedetniemi, S. T. (1974). Independence graphs. In *Graph Theory and Computing, Utilitas Math*, pages 471–491. Conference on Combinatorics.

Cockayne, E. J. and Hedetniemi, S. T. (1977). Towards a theory of domination in graphs. In *Networks 7*, pages 247–261.

Gözüpek, D., Hujdurović, A., and Milanič, M. (2017). In *Characterizations of minimal dominating sets and the well-dominated property in lexicographic product graphs*, pages 1–17. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.

Maheswari, S. U. and Parvathi, M. S. (2017). In *Independent Dominating Sets of Lexicographic Product Graphs of Cayley Graphs with Arithmetic Graphs*, pages 160–166. International Journal of Advanced in Management, Technology and Engineering Sciences.

Melo, L. F. and Coelho, E. M. M. (2019). *Conjuntos dominantes independentes abertos no produto Lexicográfico de alguns grafos*. Anais do XVI Congresso de Ensino Pesquisa e Extensão da UFG.

Seo, S. J. and Slater, P. J. (2017). In *Open-independent, open-locating-dominating sets*, pages 179–193. Elec. Journal of Graph Theory and Applications.

Sitthiwirattham, T. (2013). In *Domination on Lexicographical Product of Complete Graph*, pages 745–750. International Journal of Pure and Applied Mathematics.

Zhang, X., Liu, J., and Meng, J. (2011). In *Domination in lexicographic product graphs*, pages 251–256. Ars Combinatoria.