Problemas musicais - estrutura, propostas e complexidade

Luerbio Faria[1], Natan Figueiredo[1], Vinicius Fernandes dos Santos[2]

[1]Pós-Graduação em Ciências Computacionais – UERJ – Rio de Janeiro

[2]Departamento de Ciência da Computação – UFMG – Belo Horizonte – MG – Brazil

natanfigueiredo012@gmail.com, luerbio@ime.uerj.br

viniciussantos@dcc.ufmg.br

Abstract. *Musical arrangements have recently been treated from a combinatorial point of view. These problems consider a score with a given number of staves corresponding to the participating instruments. The objective is to select a certain number of instruments that meet some specific musical properties. In this work, two new decision problems for musical arrangement are proposed, the* ARRANGEMENT FOR k INSTRUMENTS *and the* TIME FILLING BY INSTRUMENTS. *It is proved that both problems are NP-complete.*

Resumo. *Arranjos musicais têm sido tratados recentemente do ponto de vista combinatório. Esses problemas consideram uma partitura com um número dado de pautas correspondentes aos instrumentos participantes. O objetivo é selecionar um certo número de instrumentos que atendam a algumas propriedades musicais específicas. Neste trabalho, são propostos dois novos problemas de decisão para arranjo musical, o* ARRANJO PARA k INSTRUMENTOS *e o* PREENCHIMENTO DE TEMPOS POR INSTRUMENTOS. *É provado que ambos os problemas são NP-completos.*

1. Introdução

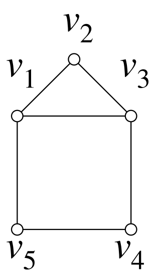
Em tempos recentes, temos visto aplicações da inteligência artificial à música [1] e o desenvolvimento de heurísticas voltadas à produção de música de forma automática. Porém, até recentemente, pouco havia sido discutido a respeito de problemas combinatórios [2] e nada sobre problemas de decisão associados à organização de instrumentos e arranjos.

Em 2017, Demaine e Moses [3] consideraram três problemas de decisão associados a arranjos musicais. Uma *pauta* é um sistema de cinco linhas horizontais, paralelas e equidistantes sobre e entre as quais se escrevem as notas e silêncios de um ou mais instrumentos musicais. Um *compasso* é um intervalo regular de tempos. Cada pauta é formada por compassos, que são preenchidos por notas musicais ou tempos de silêncio. Uma *partitura* $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ é uma coleção de uma ou mais pautas que tocam ao mesmo tempo. Neste trabalho, tempo e compasso serão indistinguíveis (todas as notas e silêncios duram o compasso inteiro) e cada pauta tem apenas um instrumento e não toca mais de uma nota simultânea. Além disso, consideraremos também que todas as pautas têm a mesma extensão temporal, isto é, têm o mesmo número de compassos. Os autores [3] tinham o objetivo de decidir a existência de uma subcoleção $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ com diferentes propriedades quanto à facilidade de execução do arranjo resultante ou à sua agradabilidade, sempre mantendo um mínimo de fidelidade do arranjo final em relação à peça original.

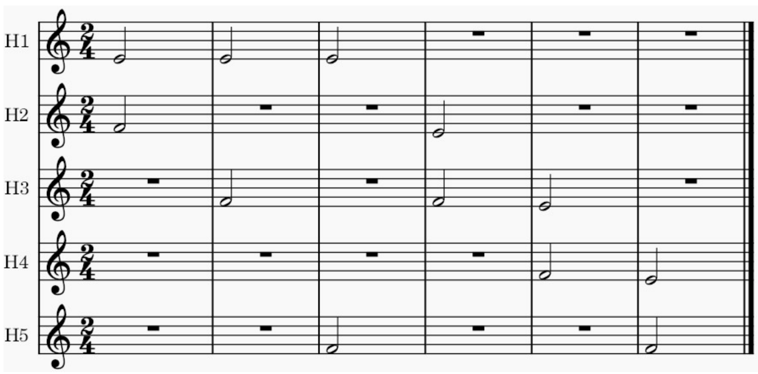
2. Novos Problemas para Arranjo Musical

Neste artigo, nós introduzimos dois novos problemas. No primeiro problema, consideramos um arranjador que deseja fazer uma versão popular e mais acessível de uma música clássica. Normalmente, arranjos de orquestras possuem um grande número de instrumentos. Assim, o arranjador quer agrupar as notas de múltiplos instrumentos da música original em apenas um, até criar um novo conjunto de k instrumentos disponíveis, sem deixar de tocar nenhuma nota. Formalizamos este problema a seguir.

ARRANJO PARA k INSTRUMENTOS (k-ARRANJO)
Entrada: Coleção de pautas $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$.
Pergunta: Existe uma partição $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de $\mathcal{H}$ em k conjuntos de instrumentos, tal que, se duas pautas H_i, H_j pertencerem ao mesmo conjunto A_ℓ, então elas satisfazem que, se H_i e H_j tocam no mesmo tempo, H_i e H_j tocam as mesmas notas naquele tempo?



(a) Grafo G com $k = 3$.



(b) Coleção de pautas $\mathcal{H}$

Tabela 1. Exemplo para a transformação k–COLORAÇÃO$\propto$ARRANJO PARA k INSTRUMENTOS (k-ARRANJO), em que a instância $\mathcal{H}$ de 3-arranjo é obtida a partir da instância $(G, 3)$.

Teorema 1. *k-ARRANJO é NP-completo.*

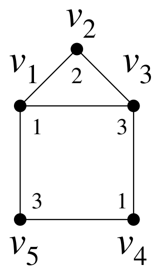
Demonstração. k-ARRANJO está em NP, pois um certificado $\{A_1, \ldots, A_k\}$ pode ser verificado para a resposta Sim em tempo polinomial checando que, sempre que H_i e H_j pertencem ao mesmo instrumento A_ℓ e tocam ao mesmo tempo, então eles estão tocando as mesmas notas. Vamos usar o problema NP-completo k-COLORAÇÃO [4] para provar que k-COLORAÇÃO $\propto$ k-ARRANJO.

Dada uma instância $G = (V, E)$ de k-COLORAÇÃO com $n = |V|$ e $m = |E|$ e um inteiro positivo k. Uma instância $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ de k-ARRANJO é construída a partir de (G, k), de forma que G é k-colorível se e somente se $\mathcal{H}$ é uma instância Sim de k-ARRANJO. Nossa partitura será formada por n pautas com m compassos cada uma.

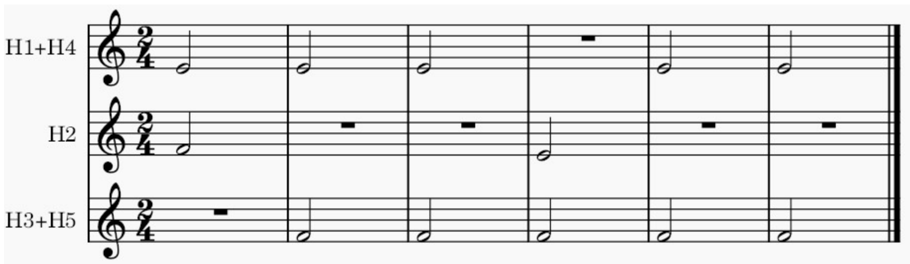
Para $i \leftarrow 1, \ldots, n$, produzimos uma pauta H_i. Dado que v_i ocorre nas arestas $e^i_1, \ldots, e^i_{d(v_i)}$. Para cada $j \leftarrow i + 1, \ldots d(v_i)$, se $e^i_j = v_i v_s$, então H_i e H_s tocam repectivamente as notas E e F no compasso $i + j - 1$. Isso conclui a construção de $\mathcal{H}$. Para a conveniência do leitor, nós oferecemos na Tabela 1 um exemplo da transformação. Na Tabela 2, um arranjo com 3 instrumentos é obtido a partir da 3-coloração de G, na qual aos vértices v_1, v_4 foi atribuída a cor 1, ao vértice v_2 foi atribuída a cor 2 e aos vértices v_3, v_5 foi atribuída a cor 3.

Suponha que (G, k) é uma instância Sim. Então G é k-colorível, ou seja, existe uma função $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ quando $uv \in E$. Mostraremos que $\mathcal{H}$ é também uma instância Sim, escolhendo a pauta H_i para adicionar a parte A_ℓ se e somente se o vértice v_i tiver sido colorido com a cor ℓ, $\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Como vértices adjacentes recebem cores diferentes e como existe uma bijeção entre compassos e arestas, para qualquer par de instrumentos H_i, H_j atribuídos a um mesmo conjunto A_ℓ, eles não poderão tocar simultaneamente.

Agora, suponha que $\mathcal{H}$ é uma instância Sim de k-ARRANJO. Atribuímos a cor $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ ao vértice $v_i \in V$ se e somente se $H_i \in A_\ell$. Sabemos que, se H_i e H_j são os instrumentos que tocam em um determinado compasso, eles tocam notas diferentes, o que significa que H_i e H_j não podem pertencer a mesma parte A_ℓ. Logo, a atribuição será uma coloração própria. □



(a) 3-coloração do grafo G.



(b) 3-arranjo $\{A_1, A_2, A_3\} = \{H_1 \cup H_4, H_2, H_3 \cup H_5\}$.

Tabela 2. 3-arranjo (b) obtido a partir da 3–coloração da instância $(G, 3)$ (a).

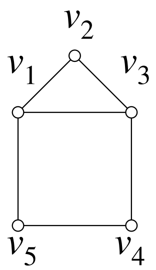
No segundo problema, o arranjador deseja reduzir o número de instrumentos de forma que, em cada tempo (compasso), pelo menos um dos instrumentos da partitura original toque no arranjo final.

PREENCHIMENTO DE TEMPOS POR INSTRUMENTOS - (PRE-INST)
Entrada: Coleção de pautas $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ e inteiro positivo $k > 0$.
Pergunta: Existe uma coleção $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, tal que para cada tempo existe $H \in \mathcal{H}'$ que toca nesse tempo com $|\mathcal{H}'| \leq k$?
Teorema 2. PREENCHIMENTO DE TEMPOS POR INSTRUMENTOS *é NP-completo.*

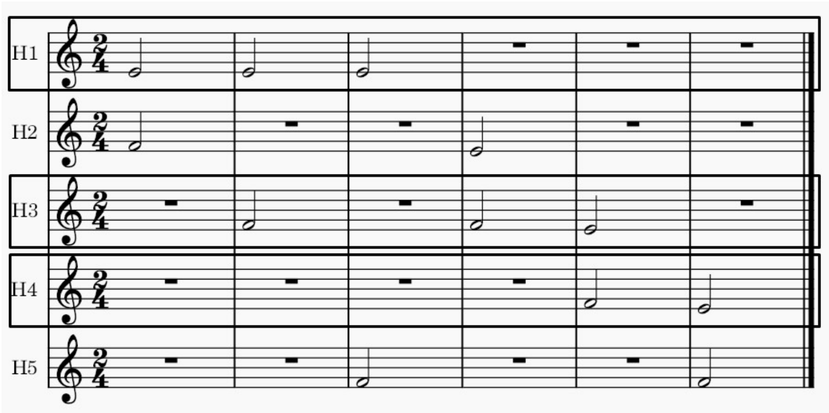
Demonstração. PRE-INST está em NP, pois um certificado $\mathcal{H}'$ pode ser verificado em tempo polinomial checando se $|\mathcal{H}'| \leq k$ e em cada tempo se existe $H \in \mathcal{H}'$ que toca nesse tempo. Vamos usar o problema NP-completo COBERTURA DE VÉRTICES [4] para provar que COBERTURA DE VÉRTICES $\propto$ PRE-INST. Dado um grafo $G = (V, E)$ com $n = |V|$ e $m = |E|$ e um inteiro positivo k uma instância de COBERTURA DE VÉRTICES. Constrói-se uma instância $(\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}, k)$ de PRE-INST a partir de (G, k), tal que existe uma cobertura de vértices V' de G se e somente se $(\mathcal{H}, k)$ é uma instância Sim de PRE-INST. Nossa partitura $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ será formada da mesma forma que no Teorema 1, com a única diferença de que nessa construção as pautas tocam a mesma nota E (Mi). Para a conveniência do leitor, nós oferecemos na Tabela 3 um exemplo da transformação.

Suponha que existe uma cobertura de vértices V' em G de tamanho $|V'| \leq k$, onde para cada aresta $uv \in E$, pelo menos um dos vértices u ou v pertence a V'. Nós damos uma receita para mostrar que $(\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}, k)$ é também uma instância Sim, escolhendo a pauta H_i para adicionar para uma subcoleção $\mathcal{H}'$ com $|\mathcal{H}'| \leq k$ se e somente se $v_i \in V'$. Como existem m compassos associados a cada aresta de E, temos que em cada tempo é tocada pelo menos uma nota por algum $H \in \mathcal{H}'$.

Suponha que $(\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_n\}, k)$ é uma instância Sim. Seja $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ com $|\mathcal{H}'| \leq k$, tal que para cada tempo existe $H \in \mathcal{H}'$ que toca nesse tempo. Nós observamos que, em cada tempo (compasso) de $\mathcal{H}$, exatamente duas pautas têm notas. Assim, em cada tempo, uma das duas pautas tem que estar presente em $\mathcal{H}'$. Produz-se uma cobertura por vértices V' com $|V'| \leq k$ colocando v_i em V' se e somente se H_i toca no tempo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dessa forma, para cada aresta $e \in E$, uma das suas extremidades pertencem a V'. E assim temos que V' é uma cobertura por vértices e $|V'| \leq k$. Assim, PRE-INST é NP-completo. □



(a) Grafo G com $k = 3$.



(b) Coleção com 3 pautas que tocam em cada compasso da música.

Tabela 3. Instância de PRE-INST **(b) obtida a partir da instância** $(G, 3)$ **de** COBERTURA POR VÉRTICES **(a). A cobertura por vértices** $V' = \{v_1, v_3, v_4\}$ **gera o conjunto de pautas** $\{H_1, H_3, H_4\}$ **de tamanho 3 que toca em cada tempo de** $\mathcal{H}$**.**

Como trabalhos futuros, investigaremos novos problemas musicais, enfatizando o arranjo musical, assim como versões parametrizadas e de otimização dos problemas existentes.

Referências

[1] Curtis Roads. Research in music and artificial intelligence. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 17(2):163–190, 1985.

[2] Godfried T Toussaint. Algorithmic, geometric, and combinatorial problems in computational music theory. *Proceedings of X Encuentros de Geometria Computacional*, pages 101–107, 2003.

[3] Erik D Demaine and William S Moses. Computational complexity of arranging music. *The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Research in Games, Graphs, Counting, and Complexity, Volume 2*, 2:364, 2017.

[4] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. Miller and J. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, 1972.