

# 3-atribuição de papéis em produto forte de grafos bipartidos e grafos cordais sem folhas\*

Gustavo Morais Medeiros<sup>1</sup>, Julliano Rosa Nascimento<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)  
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil

medeiros@discente.ufg.br, jullianonascimento@ufg.br

**Abstract.** *Let  $G$  be a simple graph and  $r$  be a positive integer. An  $r$ -role assignment is an assignment of  $r$  distinct roles to the vertices of  $G$ , such that two vertices with the same role share the same set of roles among their adjacent vertices. Determining whether a graph has an  $r$ -role assignment is  $\mathcal{NP}$ -complete for fixed  $r \geq 3$ , even when restricted to bipartite or chordal graphs. Motivated by previous work, we show that the strong product of two non-trivial graphs has a 3-role assignment if at least one of its factors is a bipartite graph or it is a chordal graph with no leaves.*

**Resumo.** *Seja  $G$  um grafo simples e  $r$  um inteiro positivo. Uma  $r$ -atribuição de papéis é uma atribuição de  $r$  papéis distintos aos vértices de  $G$ , tal que, dois vértices com o mesmo papel têm o mesmo conjunto de papéis nos vértices adjacentes. Determinar se um grafo possui uma  $r$ -atribuição de papéis é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $r \geq 3$  fixo, mesmo restrito a grafos bipartidos ou cordais. Motivados por trabalhos anteriores, mostramos que o produto forte entre dois grafos conexos não triviais possui uma 3-atribuição de papéis se ao menos um de seus fatores for um grafo bipartido ou for um grafo cordal sem folhas.*

## 1. Introdução

Sejam  $G$  um grafo simples e  $R$  um grafo possivelmente com laços. Uma  $R$ -atribuição de papéis para  $G$  é uma função de homomorfismo localmente sobrejetor de  $G$  para  $R$ , de modo que a relação de vizinhança é mantida, tal que todos os papéis vizinhos à imagem de um vértice aparecem como papéis na vizinhança do vértice. Tal condição pode ser expressa através da função  $p : V(G) \rightarrow V(R)$ , em que para todo  $u \in V(G)$  tem-se  $p(N_G(u)) = N_R(p(u))$ . Dizemos que  $p$  é uma  $r$ -atribuição de papéis de  $G$ , quando  $r = |V(R)|$ . Assim, se  $G$  tem uma  $R$ -atribuição de papéis, então  $G$  possui uma  $r$ -atribuição de papéis. Comumente, chamamos os vértices de  $R$  de *papéis*. Um exemplo de 3-atribuição de papéis segue na Figura 1(b) com grafo de papéis  $R_1$  evidenciado na Figura 1(c). Vale ressaltar que o problema de determinar uma  $r$ -atribuição é um problema não monótono, ou seja, pode ser que para determinado grafo exista uma 3-atribuição de papéis e não exista uma 2-atribuição de papéis, como é o caso do grafo  $C_5$ . Atribuição de papéis conta com aplicações em grafos de interações e papéis desempenhados por indivíduos em redes sociais [Aleksandar e Fred 1999].

Destacamos alguns resultados conhecidos sobre o problema de determinar uma  $r$ -atribuição de papéis para um grafo  $G$ . Em grafos cordais, o problema é solucionável

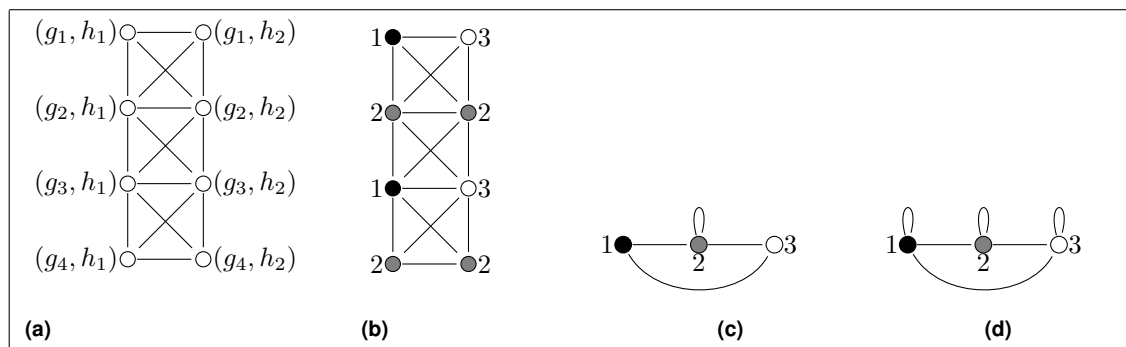
---

\*Trabalho realizado com apoio de Bolsa PIP-UFG.

em tempo linear para  $r = 2$ , mas  $\mathcal{NP}$ -completo para  $r \geq 3$  [van 't Hof et al. 2010]. Para planares e grafos com grau máximo 3, o problema é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $r \geq 2$  [Purcell e Rombach 2015, Purcell e Rombach 2021]. Em grafos bipartidos, o problema é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $r \geq 3$ , por outro lado, constante para  $r = 2$  [Pandey 2019]. Em grafos *split*, é trivial para  $r = 2$ , linear para  $r = 3$  e  $\mathcal{NP}$ -completo para  $r \geq 4$  [Dourado 2016]. Há resultados de atribuição de papéis para alguns produtos de grafos, como: Cartesiano [Castonguay et al. 2022, Castonguay et al. 2023, Zhao et al. 2010], direto [Fiala e Paulusma 2005], lexicográfico [Zhao et al. 2010]. Focamos no produto forte.

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , o *produto forte* de  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \boxtimes H$ , é definido como um grafo com conjunto de vértices  $V(G \boxtimes H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ e } h \in V(H)\}$  e conjunto de arestas  $E(G \boxtimes H) = \{(g, h)(g', h') \mid g = g', hh' \in E(H) \text{ ou } gg' \in E(G), h = h'\} \cup \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G) \text{ e } hh' \in E(H)\}$  [Hammack et al. 2011]. Na Figura 1(a), exemplificamos o produto forte  $P_4 \boxtimes K_2$ .

Em [Medeiros e Nascimento 2023] é demonstrado que o produto forte entre um grafo não trivial e um grafo completo sempre possui 2- e 3-atribuição de papéis. Em continuidade, neste artigo mostramos que  $G \boxtimes H$  possui 3-atribuição de papéis quando  $G$  ou  $H$  é bipartido, e quando  $G$  ou  $H$  é um grafo cordal sem folhas. Nossos resultados consideram  $G$  e  $H$  conexos e seguem na Seção 3. Antes, apresentamos na Seção 2 alguns conceitos e notações utilizados.



**Figura 1. (a) Grafo  $P_4 \boxtimes K_2$ , com  $V(P_4) = \{g_1, \dots, g_4\}$  e  $V(K_2) = \{h_1, h_2\}$ . (b) Uma  $R_1$ -atribuição para o grafo  $P_4 \boxtimes K_2$ . (c) Grafo  $R_1$ . (d) Grafo  $R_2$ .**

## 2. Conceitos Básicos

Para conceitos básicos em grafos nos referimos a [Bondy e Murty 2008, Diestel 2000]. Um grafo é chamado *trivial* se possui um único vértice e *não trivial* caso contrário. Uma *clique* (resp. *conjunto independente*) de um grafo  $G$  é um subconjunto de vértices que tomados dois a dois são adjacentes (resp. não adjacentes). Um conjunto independente  $I$  de um grafo  $G$  é *maximal* se todo vértice  $v \in V(G) \setminus I$  tem um vizinho em  $I$ . Um grafo  $G$  é *bipartido*, se existe uma partição de  $V(G) = A \cup B$ , tal que  $A$  e  $B$  são conjuntos independentes;  $(A, B)$  é chamada *bipartição* de  $G$ . Um grafo é dito *cordal* se não contém ciclos induzidos com 4 ou mais vértices.

A *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$ , denotada por  $dist(u, v)$ , é o comprimento do caminho mais curto entre  $u$  e  $v$ . Um grafo  $G$  é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices são ligados por um caminho em  $G$ , e *desconexo* caso contrário. Uma *árvore* é um grafo

conexo sem ciclos. Seja  $T$  uma árvore enraizada em  $r \in V(T)$ . Definimos a *altura* de  $T$ , denotada por  $h(T)$ , como o comprimento do caminho mais longo entre  $r$  e uma folha  $f \in V(T)$ . Um vértice  $v \in V(T)$  é dito *interno* se  $v$  não é folha em  $T$ . A *excentricidade* de um vértice  $v$  é a distância máxima de  $v$  a qualquer outro vértice do grafo. Um vértice  $v$  é dito *articulação* se  $G \setminus v$  é desconexo.

Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos com  $V(G) = \{g_1, \dots, g_m\}$  e  $V(H) = \{h_1, \dots, h_n\}$ . Os grafos  $G$  e  $H$  são ditos *fatores* de  $G \boxtimes H$ . Chamamos de *linha*  $\mathcal{L}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , o conjunto de vértices  $\{(g_i, h_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$  de  $V(G \boxtimes H)$ , e de *coluna*  $\mathcal{C}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , o conjunto de vértices  $\{(g_k, v_j) \mid 1 \leq k \leq m\}$  de  $V(G \boxtimes H)$ .

### 3. Resultados

Para 3-atribuição de papéis temos alguns possíveis grafos  $R$ . Nossos resultados usam explicitamente  $R_1$  e  $R_2$  representados nas Figuras 1(c) e 1(d), respectivamente. Mostramos no Teorema 1 que o produto forte entre dois grafos não triviais possui uma 3-atribuição de papéis se ao menos um de seus fatores for um grafo bipartido.

**Teorema 1.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos conexos não triviais. Se  $G$  ou  $H$  é bipartido, então  $G \boxtimes H$  possui uma  $R_1$ -atribuição de papéis.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  e  $H$  grafos conexos não triviais. Como o produto forte é comutativo, podemos assumir que  $H$  é bipartido. Considere  $(A, B)$  uma bipartição de  $V(H)$ .

Seja  $I$  um conjunto independente maximal de  $G$  e denote  $V(G) = \{g_1, \dots, g_m\}$  e  $V(H) = \{h_1, \dots, h_n\}$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , definimos  $p : V(G \boxtimes H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  como:

$$p((g_i, h_j)) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i \in I \text{ e } h_j \in A; & (1.1) \\ 3, & \text{se } g_i \in I \text{ e } h_j \in B; & (1.2) \\ 2, & \text{caso contrário.} & (1.3) \end{cases}$$

Para mostrarmos que  $p$  é uma  $R_1$ -atribuição de papéis, para todo  $v \in V(G \boxtimes H)$ , verificamos que: se  $p(v) = 1$ , então  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{2, 3\}$ ; se  $p(v) = 2$ , então  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{1, 2, 3\}$ ; se  $p(v) = 3$ , então  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{1, 2\}$ .

Primeiro, seja  $v$  um vértice com papel 1, isto é  $v = (g_i, h_j) \in I \times A$ . Dada a definição de  $p$ , temos que  $p(\mathcal{L}_i) = \{1, 3\}$  e  $p(\mathcal{C}_j) = \{1, 2\}$ . Como  $H$  é bipartido conexo não trivial, temos que  $v$  é adjacente a ao menos um vértice de papel 3 e não é adjacente a qualquer vértice de papel 1 na linha  $\mathcal{L}_i$ . Além disso, como  $I$  é um conjunto independente maximal de  $G$ , temos que  $v$  é adjacente a ao menos um vértice de papel 2 e não é adjacente a qualquer vértices de papel 1 na coluna  $\mathcal{C}_j$ . Por fim, para todo  $u \in N_{G \boxtimes H}(v) \setminus (\mathcal{L}_i \cup \mathcal{C}_j)$ , a definição de  $p$  implica que  $p(u) = 2$ . Logo  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{2, 3\}$ . De forma similar, para  $v = (g_i, h_j) \in I \times B$ , isto é,  $p(v) = 3$ , a definição de  $p$  implica que  $p(\mathcal{L}_i) = \{1, 3\}$ ,  $p(\mathcal{C}_j) = \{2, 3\}$  e para todo  $u \in N_{G \boxtimes H}(v) \setminus (\mathcal{L}_i \cup \mathcal{C}_j)$ ,  $p(u) = 2$ . Assim, a conclusão  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{1, 2\}$  é análoga.

Agora, definimos  $I' = V(G) \setminus I$ . Considere  $v = (g_i, h_j) \in (I' \times A)$ , isto é,  $p(v) = 2$ . A prova para o caso  $v = (g_i, h_j) \in (I' \times B)$  é similar. Por (1.3) sabemos que  $p(\mathcal{L}_i) = \{2\}$ , logo  $2 \in p(N_{G \boxtimes H}(v))$  visto que  $H$  é conexo e não trivial. Como  $I$  é um conjunto independente maximal e  $g_i \notin I$ , temos que existe  $g_{i'} \in I$  tal que  $g_i g_{i'} \in E(G)$ .

Isso implica que  $v = (g_i, h_j)$  é adjacente a  $u = (g_{i'}, h_j)$  com  $p(u) = 1$ . Além do mais, como  $H$  é bipartido conexo não trivial, existe  $h_{j'} \in B$  tal que  $h_j h_{j'} \in E(H)$ , logo  $v = (g_i, h_j)$  é adjacente a  $w = (g_{i'}, h_{j'})$  com  $p(w) = 3$ . Logo,  $p(N_{G \boxtimes H}(v)) = \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Nosso próximo resultado trata de grafos cordais conexos sem folhas.

**Teorema 2.** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos conexos não triviais. Se  $G$  ou  $H$  é cordal sem folhas, então  $G \boxtimes H$  possui uma  $R_2$ -atribuição de papéis.*

*Demonstração.* Como o produto forte é comutativo, assumimos que  $H$  é cordal sem folhas. Seja  $r$  um vértice de excentricidade máxima em  $H$ . Sabemos que  $r$  não é um vértice de articulação. Como  $H$  é cordal sem folhas,  $r$  está em uma clique, digamos  $C$ , de ordem pelo menos 3. Vamos usar uma árvore de busca para definir uma atribuição de papéis.

Seja  $T$  uma árvore de busca em profundidade de  $H$ , enraizada em  $r$  de tal forma que todo vértice de  $C$  seja visitado antes que os vértices de  $V(H) \setminus C$ . Note que  $h(T) \geq 3$ , já que  $|C| \geq 3$ . Definimos uma rotulação  $l : V(T) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  como  $l(v) = (\text{dist}(r, v) \bmod 3) + 1$ , para cada  $v \in V(T)$ . Um exemplo de rotulação  $l$  segue na Figura 2(a).

Usamos  $l$  para definir uma função  $p : V(G \boxtimes H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  dada por  $p((u, v)) = l(v)$ , para todo  $u \in V(G)$  e todo  $v \in V(H) = V(T)$ . Mostramos que  $p$  é uma  $R_2$ -atribuição de papéis. Veja que  $p$  é sobrejetora, pois  $h(T) \geq 3$  e  $l(C) = \{1, 2, 3\}$ .

Primeiramente, como  $G$  é conexo não trivial, temos que para todo  $u \in V(G)$ , existe  $u' \in V(G)$  tal que  $uu' \in E(G)$ . Da definição de produto forte, temos que  $uu' \in E(G)$  implica que  $(u, v)(u', v) \in E(G \boxtimes H)$ , para todo  $v \in V(H)$ . Assim, da definição de  $p$ , temos que  $p((u, v)) = p((u', v)) = i \in \{1, 2, 3\}$  e, então,  $i \in p(N_{G \boxtimes H}(u, v))$ , concluindo  $i \in N_R(i)$ . Resta mostrar que  $\{1, 2, 3\} \setminus \{p((u, v))\} \subseteq p(N_{G \boxtimes H}((u, v)))$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Se  $v$  é um vértice interno de  $T$  e  $v \neq r$ , então  $v$  possui um pai  $x$  e um filho  $y$  na árvore  $T$ . Conforme a definição de  $l$ ,  $\{l(x), l(v), l(y)\} = \{1, 2, 3\}$ , assim, a conclusão  $\{1, 2, 3\} \setminus \{p((u, v))\} \subseteq p(N_{G \boxtimes H}((u, v)))$  é imediata. Então consideramos casos particulares para a raiz e para as folhas de  $T$ . Para a raiz  $r$  de  $T$ , que possui  $p(r) = 1$ , temos que  $r \in C$ . Como  $C$  é uma clique com pelo menos 3 vértices, a definição de  $T$  implica que  $l(C) = \{1, 2, 3\}$ . Logo,  $2, 3 \in p(N_{G \boxtimes H}((u, r)))$  como desejado. Agora, seja  $f$  uma folha da árvore de busca  $T$ ,  $x = \text{pai}_T(f)$  e  $x' = \text{pai}_T(x)$ . Notamos que  $x'$  existe pois, caso contrário,  $f$  seria uma folha de  $H$ . Como  $d_H(f) \geq 2$ , temos que existe  $w \in N_H(f) \setminus \{x\}$ . Se  $\{l(f), l(x), l(w)\} = \{1, 2, 3\}$ , a conclusão é imediata. Porém, se  $|\{l(f), l(x), l(w)\}| = 2$  fazemos uma ligeira modificação em  $p$  dada adiante por  $p' : V(G \boxtimes H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .

Seja  $i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{l(f), l(x), l(w)\}$ . Denotamos  $V(G) = \{g_1, \dots, g_m\}$  e fixamos  $g_1 g_2 \in E(G)$ . A função  $p'$  é uma cópia de  $p$ , exceto por atribuir a  $(g_1, x)$  o papel que falta na vizinhança de  $(g_1, f)$ , isto é,  $p'((g_1, x)) = i$  (A1). Logo  $1, 2, 3 \in p'(N_{G \boxtimes H}((g_j, f)))$ , para  $j = 1, 2$ . Além disso, fazemos  $p'((g_2, x')) = p((g_2, x))$  (A2). Veja um exemplo de  $p'$  na Figura 2(b). Isso garante que  $1, 2, 3 \in p'(N_{G \boxtimes H}((g_j, x)))$ , para  $j = 1, 2$ , e  $1, 2, 3 \in p'(N_{G \boxtimes H}((g_j, x')))$ , para  $j = 1, 2$  (como  $x' f \notin E(H)$ ,  $\text{pai}_T(x')$  existe). Para  $s, s', t, t' \in \{1, \dots, m\}$ , o Passo A1 é repetido para  $(g_s, x)$  tal que  $g_s \in N_G(u_{s'})$  e  $(g_{s'}, x')$  tenha recebido a regra A2 e, similarmente, Passo A2 é repetido para  $(g_t, x')$  tal que  $g_t \in N_G(u_{t'})$  e  $(u_{t'}, x)$  tenha recebido a regra A1. Isso completa a descrição de  $p'$  e é possível verificar que  $p'$  é uma  $R_2$ -atribuição de papéis.  $\square$

A Figura 2(a) ilustra um grafo cordal sem folhas  $H_1$  e uma rotulação  $l$  para uma de suas árvores de busca em profundidade  $T$  (arestas em negrito). A Figura 2(b) apresenta uma  $R_2$ -atribuição de papéis para  $K_2 \boxtimes H_2$ , onde  $H_2$  é um grafo cordal sem folhas, com uma árvore de busca em profundidade cuja folha  $f$  não possui um vizinho  $x$  com  $l(x) = 2$ .

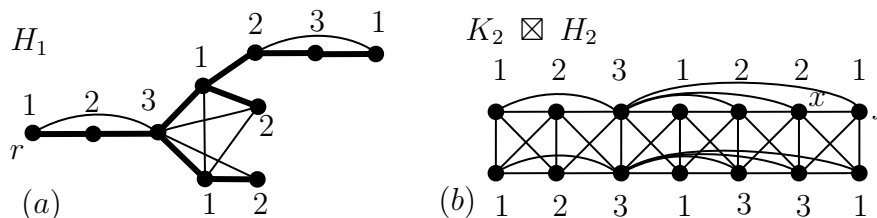


Figura 2. (a) Grafo cordal sem folhas  $H_1$ . (b) Produto forte  $K_2 \boxtimes H_2$ .

## Referências

- Aleksandar, P. e Fred, R. (1999). The role assignment model nearly fits most social networks. *Mathematical Social Sciences*, 41(3):275–293.
- Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2022). Computing some role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 56(1):115–121.
- Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2023). Computing role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 57(3):1075–1086.
- Diestel, R. (2000). *Graph theory*. New York, USA, Springer-Verlag.
- Dourado, M. C. (2016). Computing role assignments of split graphs. *Theoretical Computer Science*, 635:74–84.
- Fiala, J. e Paulusma, D. (2005). A complete complexity classification of the role assignment problem. *Theoretical computer science*, 349(1):67–81.
- Hammack, R. H., Imrich, W., e Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs*, volume 2. CRC press Boca Raton.
- Medeiros, G. M. e Nascimento, J. R. (2023). O produto forte de um grafo não trivial e o grafo completo possui 2-e 3-atribuição de papéis. In *Anais da XI Escola Regional de Informática de Goiás*. SBC.
- Pandey, S. (2019). *Role colouring hereditary classes of graphs*. PhD thesis, Indian Institute of Science Education and Research Pune.
- Purcell, C. e Rombach, P. (2015). On the complexity of role colouring planar graphs, trees and cographs. *Journal of Discrete Algorithms*, 35:1–8.
- Purcell, C. e Rombach, P. (2021). Role colouring graphs in hereditary classes. *Theoretical Computer Science*, 876:12–24.
- van ’t Hof, P., Paulusma, D., e van Rooij, J. M. (2010). Computing role assignments of chordal graphs. *Theoretical Computer Science*, 411(40):3601–3613.
- Zhao, Y.-q., Feng, W.-l., Li, H., e Yang, J.-m. (2010).  $k$ -role assignments under some graph operations. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, page 06.