Os grafos cordais comparabilidade como grafos de interseção

Márcia R. Cerioli[1,2], Rodrigo Fernandes Souto[1], Petrucio Viana[3]

[1]Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[2]Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[3]Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense (UFF) – Niterói – RJ – Brasil

marcia@cos.ufrj.br, rodrigoilha@cos.ufrj.br, petrucio_viana@id.uff.br

Abstract. *A graph G is chordal if every cycle of size at least 4 in G has a chord; it is a comparability graph if it admits a transitive orientation of its edges; and it is a chordal comparability graph if it is both a chordal graph and a comparability graph. Chordal graphs are the graphs of intersection of subtrees of a tree. It is still an unanswered question whether there is an interesting class $\mathcal{C}$ such that the comparability graphs are the intersection graphs of $\mathcal{C}$. In this work, we define a class of families of subtrees $\mathcal{T}$ such that the chordal comparability graphs are the intersection graphs of $\mathcal{T}$.*

Resumo. *Um grafo G é cordal se todo ciclo de tamanho pelo menos 4 em G possui uma corda; é de comparabilidade se admite uma orientação transitiva de suas arestas; e é cordal comparabilidade se é simultaneamente cordal e de comparabilidade. Os grafos cordais são os grafos de interseção de subárvores de uma árvore. É uma questão ainda sem resposta se existe uma classe interessante $\mathcal{C}$ tal que os grafos de comparabilidade são os grafos de interseção de $\mathcal{C}$. Neste trabalho, definimos uma classe de famílias de subárvores $\mathcal{T}$ tal que os grafos cordais comparabilidade são os grafos de interseção de $\mathcal{T}$.*

1. Grafos de interseção e grafos cordais comparabilidade

Nesta seção, revisamos conceitos e resultados básicos referentes a grafos de interseção, grafos cordais, de comparabilidade e cordais comparabilidade.

Definição 1 Seja $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ uma família de conjuntos – que podem possuir uma certa estrutura (algébrica, geométrica, topológica, etc.) – possivelmente com elementos repetidos. O *grafo de interseção* (resp. *grafo de contenção*) de $\mathcal{F}$, denotado por $\Omega(\mathcal{F})$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $\mathcal{F}$ e tal que S_i e S_j são adjacentes sse $i \neq j$ e $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ (resp. $S_i \subseteq S_j$ ou $S_j \subseteq S_i$). Um grafo G *possui uma representação por interseção em* $\mathcal{F}$ (resp. *possui uma representação por contenção em* $\mathcal{F}$) se é isomorfo a $\Omega(\mathcal{F})$.

Definição 2 Sejam $\mathcal{G}$ uma classe de grafos e $\mathcal{C}$ uma classe de famílias de conjuntos de um certo tipo. Dizemos que *os grafos em* $\mathcal{G}$ *são os grafos de interseção de* $\mathcal{C}$ (resp. *grafos de contenção de* $\mathcal{C}$) se para todo grafo G, temos: $G \in \mathcal{G}$ sse existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que G possui uma representação por interseção (resp. por contenção) em $\mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{G}$ *é classe de interseção* (resp. *classe de contenção*) se existe uma classe de famílias de conjuntos $\mathcal{C}$ tal que os grafos em $\mathcal{G}$ são os grafos de interseção (resp. grafos de contenção) de $\mathcal{C}$.

As classes de grafos de interseção foram caracterizadas em [Scheinerman 1985] (cf. [McKee and McMorris 1999], p. 6–9). Como corolário, temos que nem toda classe de grafos é de interseção, como, por exemplo, a classe dos grafos que não contém ciclos de tamanho 4 ou 5 como subgrafos induzidos.

Definição 3 Um grafo G é *cordal* se todo ciclo de tamanho ao menos 4 em G possui uma corda, ou seja, uma aresta que une dois vértices não consecutivos do ciclo. Denotamos a classe de todos os grafos cordais por Cordal.

Cordal é classe de interseção (cf. p. 91–94 de [Golumbic 2004]). Mais especificamente, para todo grafo G, são equivalentes: (a) G é cordal; (b) G é grafo de interseção de uma família de subárvores de uma árvore; (c) G possui uma *árvore característica*.

Definição 4 Seja (P, R) um conjunto parcialmente ordenado com $P = \{v_1, \dots, v_n\}$. O *grafo de comparabilidade de* (P, R) é o grafo cujo conjunto de vértices é P e tal que v_i e v_j são adjacentes sse $i \neq j$ e ou $(v_i, v_j) \in R$ ou $(v_j, v_i) \in R$. Um grafo G é *de comparabilidade* se existe um conjunto parcialmente ordenado finito (P, R), tal que G é isomorfo ao grafo de comparabilidade de (P, R). Denotamos a classe de todos os grafos de comparabilidade por $\mathsf{Comparabilidade}$.

De acordo com a Definição 4, um grafo G é de comparabilidade sse possui uma orientação transitiva de suas arestas, i.e., uma relação O_G sobre $V(G)$, tal que para todos $u, v, w \in V(G)$, se $(u, v) \in O_G$, então $(v, u) \notin O_G$ e se $(u, v), (v, w) \in O_G$, então $(u, w) \in O_G$.

$\mathsf{Comparabilidade}$ é classe de contenção [Golumbic and Scheinerman 1999]. Mais especificamente, para todo grafo G, são equivalentes: (a) G é de comparabilidade; (b) G é de contenção; (c) G é grafo de contenção de subestrelas de uma estrela. Mostramos que estas equivalências são uma simples reformulação da representação das ordens parciais como ordens de conjuntos. Além disso, como corolário de [Scheinerman 1985], provamos que a classe $\mathsf{Comparabilidade}$ também é de interseção. Na verdade, o resultado de [Scheinerman 1985] nos permite construir, de maneira artificial, um *modelo de interseção* de $\mathcal{C}$. Porém, ainda é uma questão sem resposta se existe uma classe $\mathcal{C}$, cujos elementos possuem propriedades (algébricas, geométricas, topológicas, etc.) interessantes, tal que os grafos de comparabilidade são os grafos de interseção de $\mathcal{C}$.

Definição 5 Um grafo é *cordal comparabilidade* se é cordal e é de comparabilidade. Denotamos a classe de todos os grafos cordais comparabilidade por $\mathsf{Cordal\ comparabilidade}$.

Grafos cordais comparabilidade têm sido objeto de vários estudos, particularmente, no que diz respeito a resultados estruturais: (i) a dimensão linear dos grafos cordais comparabilidade é menor ou igual a 4 [Ma and Spinrad 1991]; (ii) esse limite é justo [Kierstead et al. 1992]; (iii) $\mathsf{Cordal\ comparabilidade}$ é caracterizada pela proibição de uma lista infinita de sugrafos induzidos [Borie and Spinrad 1999]; (iv) os grafos cordais comparabilidade podem ser caracterizados através de bases quadráticas de Gröbner de certos ideais tóricos [Ohsugi and Hibi 2017]. Não conhecemos resultados sobre a estrutura das árvores características dos grafos cordais comparabilidade, mas demonstramos que o grau máximo destas árvores não é limitado [Cerioli et al. 2023].

2. Modelo de interseção para os grafos cordais comparabilidade

Nesta seção, resolvemos um problema proposto em [Borie and Spinrad 1999], exibindo um *modelo de interseção* para a classe $\mathsf{Cordal\ comparabilidade}$. O Teorema 1 pode ser entendido como uma junção de dois resultados: (i) a caracterização dos grafos cordais como os que possuem árvores características e (ii) a representação dos conjuntos parcialmente ordenados como as ordens de conjuntos.

Teorema 1 Seja G é um grafo com conjunto de cliques maximais $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$, tal que $|\mathcal{C}_i| = n_i$, para cada $i \in [k]$. O grafo G é cordal comparabilidade sse G é o grafo de interseção de uma famíla $\mathcal{F} = \{T_v : v \in V(G)\}$ de subárvores de uma árvore T que satisfazem às seguintes propriedades:

P1. Existem conjuntos não vazios $\{c_1, \ldots, c_k\}$, $\{f_1^{(1)}, \ldots, f_{n_1}^{(1)}\}$, ..., $\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\}$, ..., $\{f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)}\}$, dois a dois disjuntos, tais que: $V(T) = \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\}$, $T[\{c_1, \ldots, c_n\}]$ é subárvore de T e $f_j^{(i)}$ são folhas.

Denotamos $H \preceq G$ quando o grafo H é subgrafo induzido do grafo G. Para todos $T_v \in \mathcal{F}$, $i \in [k]$ e $c_i \in V(T_v)$, $T_v^{(c_i)} = T_v[\{c_i\} \cup \{f_j^{(i)} : f_j^{(i)} \in V(T_v)\}] \preceq T_v$.

P2. Para todos $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$, se $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$, então ou $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ ou $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$.

P3. Para todos $T_v \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$, se existe $j \in [n_i]$ tal que $f_j^{(i)} \in V(T_v)$, então $c_i \in V(T_v)$.

P4. Para todas $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$, se existem c_i e c_j tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$, então $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$.

P5. Para todas $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ e $i, j \in [k]$, se $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v)$ e $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$, então $T_u^{(c_j)} \preceq T_v^{(c_j)}$.

PROVA. Seja G um grafo com conjunto de cliques maximais $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$, tal que $|\mathcal{C}_i| = n_i$, para todo $i \in [k]$. Assumimos que $\mathcal{C}_i = \{v_1^{(i)}, \ldots, v_{n_i}^{(i)}\}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que G é cordal comparabilidade. Sejam T_G uma árvore característica de G com $V(T_G) = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ e $<$ uma orientação transitiva de G. Para construir T, tomamos os conjuntos $\{c_1, \ldots, c_k\}$, $\{f_1^{(1)}, \ldots, f_{n_1}^{(1)}\}$, ..., $\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\}$, ..., $\{f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)}\}$, disjuntos dois a dois. Além disso, consideramos que os elementos de $\{c_1, \ldots, c_k\}$ correspondem aos elementos de $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ e, para cada $i \in [k]$, que os elementos de $\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\}$ correspondem aos elementos de $\mathcal{C}_i$. A partir daí, T é definida por $V(T) = \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\}$ e $E(T) = \{c_i c_j : \mathcal{C}_i \mathcal{C}_j \in E(T_G)\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{c_i f_j^{(i)} : j \in [n_i]\}$. Para definirmos $\mathcal{F}$, tomamos, para cada $v \in V(G)$, a subárvore $T_v = T[\{c_i : i \in [k]$ e $v \in \mathcal{C}_i\} \cup \{f_j^{(i)} : i \in [k], j \in [n_i], v \in \mathcal{C}_i$ e $v_j^{(i)} \leq v\}]$, induzida de T. A partir daí, $\mathcal{F} = \{T_v : v \in V\}$.

Suprimimos as provas de que $G = \Omega(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ satisfaz P1 e P3. No que segue, $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$ e $i, j \in [k]$.

• *$\mathcal{F}$ satisfaz* P2: Suponhamos que $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Daí, $u, v \in \mathcal{C}_i$. Assim $uv \in E(G)$. Agora, como $<$ é orientação transitiva, temos dois casos exclusivos. Se $u < v$, vamos mostrar que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$. De fato, seja $x \in V(T_u^{(c_i)})$. Se $x = c_i$, como $c_i \in V(T_v)$, temos $x \in V(T_v^{(c_i)})$. Por outro lado, se $x = f_j^{(i)}$, temos $f_j^{(i)} \in V(T_u)$. Daí, x corresponde a $v_j^{(i)} \in \mathcal{C}_i$ tal que $v_j^{(i)} \leq u$. Como $<$ é transitiva, e $v_j^{(i)} \leq u < v$, temos $v_j^{(i)} < v$.

Assim $x = f_j^{(i)} \in V(T_v^{(c_i)})$. Desta forma, $V(T_u^{(c_i)}) \subset V(T_v^{(c_i)})$. Resta mostrar que, dados $x, y \in V(T_u^{(c_i)})$ tais que $xy \in E(T_v^{(c_i)})$ temos $xy \in E(T_u^{(c_i)})$, i.e, que $T_u^{(c_i)}$ é subárvore induzida de $T_v^{(c_i)}$. De fato, se $xy \in E(T_v^{(c_i)})$, então, sem perda de generalidade, podemos considerar $x = c_i$ e $y = f_j^{(i)}$, para algum $j \in [n_i]$. Assim, $c_i f_j^{(i)} \in E(T_u^{(c_i)})$. De maneira análoga, o caso $v < u$ fornece $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$.

• $\mathcal{F}$ *satisfaz* P4: Suponhamos que existem c_i e c_j tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$. Como $c_i \in V(T_u^{(c_i)})$, temos $c_i \in V(T_u)$. Daí, $u \in \mathcal{C}_i$. De forma análoga, $v \in \mathcal{C}_i$ e $v, w \in \mathcal{C}_j$. Vamos provar que uv, uw e $vw \in E(G)$ para concluir que $u, v, w \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. De fato, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $f_k^{(i)}$, para algum $k \in [n_i]$, tal que $f_k^{(i)}$ corresponde a $v_k^{(i)} = u$. Pela hipótese, $f_k^{(i)} \in V(T_v^{(c_i)})$. Daí, pela definição de $T_v^{(c_i)}$, temos $v_k^{(i)} = u < v$. Analogamente, $v < w$. Agora, como $u < v < w$, pela transividade de $<$, temos $u < w$. Assim $uv, uw, vw \in E(G)$. Como $u, v \in \mathcal{C}_i$ e $v, w \in \mathcal{C}_j$, concluímos que $u, v, w \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. Desta forma, pela definição de T_u, T_v e T_w, temos $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$.

• $\mathcal{F}$ *satisfaz* P5: Suponhamos que $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v)$ e $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$. Seja $x \in V(T_u^{(c_j)})$. Consideremos dois casos. Se $x = c_j$, como $c_j \in T_v^{(c_j)}$, temos $x \in V(T_v^{(c_j)})$. Se $x = f_k^{(j)}$, para algum $k \in [n_j]$, pela definição de $T_u^{(c_j)}$, temos que x corresponde a $v_k^{(j)} \leq u$. Além disso, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $f_l^{(i)} \in V(T_u^{(c_i)})$, para algum $l \in [n_i]$, tal que $f_l^{(i)}$ corresponde a $v_l^{(i)} = u$. Agora, pela hipótese, $v_l^{(i)} \in V(T_v^{(c_i)})$ e, pela definição de $T_v^{(c_i)}$, temos $v_l^{(i)} = u < v$. Assim, $v_k^{(j)} \leq u < v$. Desta forma, pela definição de $T_v^{(c_j)}$, temos $x = f_k^{(j)} \in V(T_v^{(c_j)})$. Resta mostrar que, dados $x, y \in V(T_u^{(c_j)})$ tais que $xy \in E(T_v^{(c_j)})$, temos $xy \in E(T_u^{(c_j)})$. O raciocínio é análogo ao utilizado em P2.

($\Leftarrow$) Seja T uma árvore e $\mathcal{F} = \{T_u, \ldots, T_v\}$ família de subárvores de T satisfazendo às propriedades P1 $-$ P5. Como $\mathcal{F}$ é família de subárvores de uma árvore, $\Omega(\mathcal{F})$ é cordal.

• $\Omega(\mathcal{F})$ *é grafo de comparabilidade*: Seja $\rightarrow$ a relação sobre $\mathcal{F}$, definida, para todas $T_u, T_v \in \mathcal{F}$, por: $T_u \rightarrow T_v$ sse existe $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$ tal que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_j)}$. Vamos provar que $\rightarrow$ é uma orientação transitiva de $\Omega(\mathcal{F})$.

(i) $\rightarrow$ *é orientação de* $\Omega(\mathcal{F})$: Sejam $T_u, T_v \in \mathcal{F}$. Suponhamos que $T_u T_v \in E(\Omega(\mathcal{F}))$. Daí, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Tomemos $w \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Por P1, temos dois casos. Se $w = c_i$, temos $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Assim, por P2, ou $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ ou $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$. Logo, pela definição de $\rightarrow$, temos ou $T_u \rightarrow T_v$ ou $T_v \rightarrow T_u$. Por outro lado, se $w = f_j^{(i)}$, como $w \in V(T_u) \cap V(T_v)$, por P3, $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Assim, por P2, ou $T_u^{(c_i)} \rightarrow T_v^{(c_i)}$ ou $T_v^{(c_i)} \rightarrow T_u^{(c_i)}$. Logo, pela definição de $\rightarrow$, temos ou $T_u \rightarrow T_v$ ou $T_v \rightarrow T_u$. Reciprocamente, suponhamos que $T_u T_v \notin E(\Omega(\mathcal{F}))$. Daí, $V(T_u) \cap V(T_v) = \emptyset$. Assim, não existe $i \in [k]$ tal que $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Daí, pela definição de $\rightarrow$, temos $T_u \not\rightarrow T_v$ e $T_v \not\rightarrow T_u$. Logo, não é o caso que ou $T_u \rightarrow T_v$ ou $T_v \rightarrow T_u$.

(ii) $\rightarrow$ *é transitiva em* $\Omega(\mathcal{F})$: Sejam $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$ tais que $T_u \rightarrow T_v$ e $T_v \rightarrow T_w$. Daí, pela definição de $\rightarrow$, existem $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$ e $c_j \in V(T_v) \cap V(T_w)$ tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$. Assim, por P4, $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$. Então, como $c_i, c_j \in V(T_v) \cap V(T_w)$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$, por P5, $T_v^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Daí, $T_u^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Assim, existe c_i tal que $T_u^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Logo, pela definição de $\rightarrow$, $T_u \rightarrow T_w$. ■

Referências

Borie, R. B. and Spinrad, J. P. (1999). Construction of a simple elimination scheme for a chordal comparability graph in linear time. *Discrete Applied Mathematics*, 91:287–292.

Cerioli, M. R., Souto, R. F., and Viana, P. (2023). As árvores características dos grafos cordais comparabilidade não possuem grau limitado. In *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação*, pages 60–63. SBC.

Golumbic, M. C. (2004). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier, 2th edition.

Golumbic, M. C. and Scheinerman, E. R. (1999). Containment graphs, posets, and related classes of graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 555:192–204.

Kierstead, H. A., Trotter, W. T., and Qin, J. (1992). The dimension of cycle-free orders. *Order*, 9:103–110.

Ma, T.-H. and Spinrad, J. P. (1991). Cycle-free partial orders and chordal comparability graphs. *Order*, 8:49–61.

McKee, T. A. and McMorris, F. R. (1999). *Topics in Intersection Graph Theory*. SIAM.

Ohsugi, H. and Hibi, T. (2017). A Gröbner basis characterization for chordal comparability graphs. *European Journal of Combinatorics*, 59:122–128.

Scheinerman, E. R. (1985). Characterizing intersection classes of graphs. *Discrete Mathematics*, 55:185–193.