

# Sobre a generalização do grafo da Torre de Hanoi

Lia Martins<sup>1,2</sup>, Jonas Costa<sup>1</sup>, Rosiane de Freitas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Computação – Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

<sup>2</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFAM) – Campus CMZL

Manaus – AM – Brazil

{lia.martins, jonas.costa, rosiane}@icompu.ufam.edu.br

**Abstract.** *The classic Tower of Hanoi (ToH) puzzle consists of a base with three pegs  $P = p_0, p_1, p_2$  and a set of  $n$  discs  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  of different sizes, where  $d_i < d_j$  if  $i < j$ . In the initial state, all discs are stacked on  $p_0$  in descending order of size, a perfect regular state. The objective of the game is to transfer all the discs to  $p_2$ , in this same arrangement, obeying the following rules: (1) only one disc can be moved at a time, and always the disc at the top of one of the pegs; (2) the disc  $d_i$  can only be placed on  $d_j$  if  $i < j$ .  $H_n$  is denoted as the ToH graph with  $n$  disks.  $H_n$  characterizes all possible regular states and the moves that can be made from one state to another. In this work, a recursive algorithm is presented which, starting from the base case  $H_1$  and a cycle  $C_6$ , generates the ToH graph for any number of disks ( $H_n$ ).*

**Resumo.** *O jogo clássico da Torre de Hanoi (ToH) consiste em uma base com três pinos  $P = p_0, p_1, p_2$  e um conjunto de  $n$  discos  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  de diferentes tamanhos, sendo  $d_i < d_j$  se  $i < j$ . No estado inicial todos os discos estão empilhados em  $p_0$  em ordem decrescente de tamanho, um estado regular perfeito. O objetivo do jogo é transferir todos os discos para  $p_2$ , nessa mesma disposição, obedecendo-se as seguintes regras: (1) pode-se mover apenas um disco de cada vez, e sempre o disco do topo de um dos pinos; (2) o disco  $d_i$  só pode ser colocado sobre  $d_j$  se  $i < j$ . Denota-se  $H_n$  o grafo da ToH com  $n$  discos.  $H_n$  caracteriza todos os estados regulares possíveis e os movimentos que podem ser feitos de um estado para outro. Neste trabalho é apresentado um algoritmo recursivo que, partindo do case base  $H_1$  e de um ciclo  $C_6$ , gera o grafo da ToH para qualquer número de discos ( $H_n$ ).*

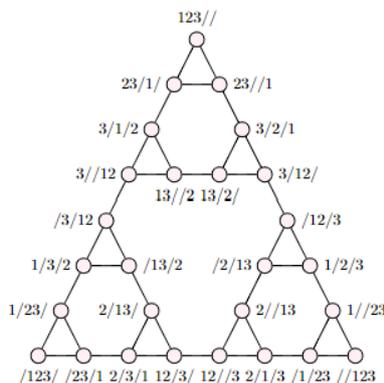
## 1. Introdução

No jogo da Torre de Hanoi (ToH), o mais conhecido dentre os jogos baseados em torres, existem 3 pinos:  $p_0$  (origem),  $p_1$  (auxiliar) e  $p_2$  (destino), e  $n$  discos com tamanhos diferentes<sup>1</sup>:  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , sendo  $d_i < d_j$  se  $i < j$ . No estado inicial do jogo todos os discos estão empilhados no pino  $p_0$  na seguinte ordem:  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , um estado regular, sendo que  $d_1$  está no topo da pilha. O objetivo do jogo é colocar todos os discos em  $p_2$  nesta mesma disposição, um estado regular perfeito, obedecendo as seguintes regras: em cada movimento, somente o topo de um dos pinos pode ser movido; o disco  $d_i$  só

---

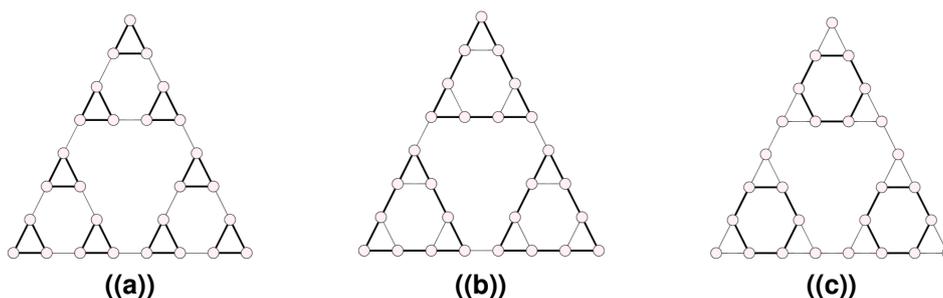
<sup>1</sup>Assume-se que os discos têm a mesma espessura, portanto, a diferença de tamanho é dada pelos seus raios.

pode ser colocado sobre  $d_j$ , se  $i < j$ . O grafo da ToH representa todos os estados regulares possíveis no jogo, bem como os movimentos que podem ser feitos de um estado para outro[Zhang et al. 2016]. Denota-se  $H_n$  o grafo do jogo da ToH com  $n$  discos. O conjunto de vértices de  $H_n$  representam os estados regulares do jogo e as arestas são as transições entre esses estados. Um exemplo do grafo do jogo com 3 discos é apresentado na Figura 1.



**Figura 1.**  $H_3$  - os vértices estão rotulados na forma  $X/Y/Z$ , onde  $X, Y$  e  $Z$  contém os índices dos discos que estão em  $p_0, p_1, p_2$  respectivamente.

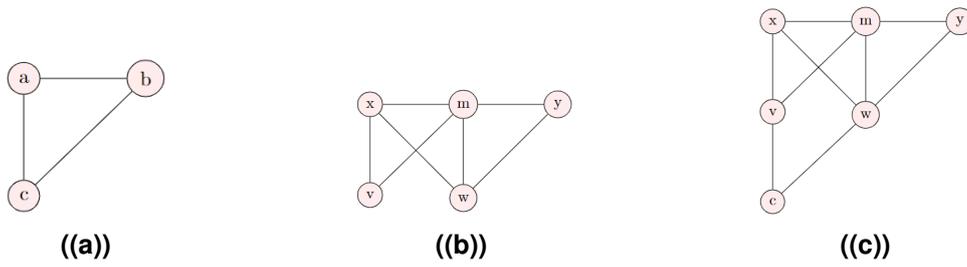
Estudando a composição do  $H_n$ , observou-se várias estruturas elementares em grafos que se repetem. Em particular, encontram-se vários triângulos  $C_3$  que juntos formam “abstrações de triângulos” maiores, bem como várias figuras hexagonais  $C_6$ . Na Figura 2, essas estruturas são destacadas no grafo  $H_3$ . Reagindo a esta observação, surgiu a ideia de generalização da construção do grafo da ToH por meio de um processo aqui denominado de *operação de enxerto*, formalmente descrita na Seção 2. Na Seção 3 é apresentado um algoritmo que generaliza a construção do grafo da ToH para  $n$  discos. Na Seção 4 são tecidas as considerações finais.



**Figura 2.** Grafo  $H_3$ : (a) Triângulos internos; (b) Outras estruturas triangulares externas; (c) Estrutura Hexagonal.

## 2. Operação de Enxerto

Dado um grafo  $G$ , com pelo menos uma aresta  $ab$ , como apresentado na Figura 3(a). Tendo um grafo  $Q$  qualquer, com pelo menos dois vértices  $v, w$ , como apresentado na Figura 3(b). A operação de enxerto  $enx(Q, v, w, G, ab)$  é um tipo especial de união dos grafo  $G$  e  $Q$  dada pela remoção da aresta  $ab$  de  $G$ , seguida da união disjunta de  $G$  e  $Q$ , e identificação dos vértices “ $a$  e  $v$ ”, e “ $b$  e  $w$ ”, como apresentado na Figura 3(c) e, formalmente, na Definição 1.



**Figura 3. Operação de enxerto**  $R = \text{enx}(Q, v, w, G, ab)$ : **(a)**  $G$ ; **(b)**  $Q$ ; **(c)**  $R$ .

**Definição 1.** A operação de enxerto resulta no grafo  $R = \text{enx}(Q, v, w, G, ab)$ , tal que  $V(R) = V(G) \setminus \{a, b\} \cup V(Q)$  e  $E(R) = E(Q) \cup \{vz \mid z \in V(G), az \in E(G), z \neq b\} \cup \{wp \mid p \in V(G), bp \in E(G), p \neq a\} \cup \{zp \mid z, p \notin \{a, b\}, zp \in E(G)\}$ .

Para enxertar múltiplas cópias de um grafo  $Q$  em  $G$ , por conveniência, utiliza-se o seguinte abuso de notação:  $\text{enx}(Q, v, w, G, M)$ , onde  $M$  é um emparelhamento qualquer de  $G$ . O que pode ser definido indutivamente como:  $\text{enx}(Q, v, w, G, \{ab\}) = \text{enx}(Q, v, w, G, ab)$  e  $\text{enx}(Q, v, w, G, M) = \text{enx}(Q', v', w', \text{enx}(Q, v, w, G, ab), M \setminus \{ab\})$ , onde  $Q'$  é uma cópia de  $Q$  e  $ab$  é uma aresta qualquer de  $M$ .

### 3. Algoritmo para Construção do Grafo da Torre de Hanoi

O grafo da ToH para  $n$  discos pode ser gerado enxertando-se 3 cópias de  $H_{n-1}$  em um emparelhamento perfeito de um  $C_6$ . Isto é,  $H_n = \text{enx}(H_{n-1}, v, w, C_6, M)$ , onde  $v, w$  são dois vértices de grau 2 de  $H_{n-1}$  e  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $C_6$ , conforme descrito no Algoritmo 1 e ilustrado nas Figuras 4(a), 4(b) e 4(c).

<b>Algoritmo 1: Construção do Grafo <math>H_n</math>.</b>	
	<b>Entrada:</b> o número de discos $n, n \geq 1$ .
	<b>Saída:</b> Grafo $H_n$ .
1	<b>ConstrucaoGrafoToH</b> ( $n$ )
2	<b>se</b> ( $n == 1$ ) <b>então</b>
3	<b>retorna</b> $H_1$
4	<b>senão</b>
5	$H_{n-1} \leftarrow$ <b>ConstrucaoGrafoToH</b> ( $n - 1$ )
6	$v, w \leftarrow$ dois vértices de grau 2 de $H_{n-1}$
7	$M \leftarrow$ <b>emparelhamentoMaximo</b> ( $C_6$ )
8	$H_n \leftarrow$ <b>enx</b> ( $H_{n-1}, v, w, C_6, M$ )
9	<b>retorna</b> $H_n$
10	<b>fim</b>
11	<b>fim</b>

É conhecido o fato que  $H_n$  é formado por três cópias de  $H_{n-1}$  [Poole 1994]. Na construção obtida pelo Algoritmo 1, essas cópias são enxertadas em três arestas disjuntas de um  $C_6$  (um emparelhamento máximo). Desta forma, restam três arestas em  $C_6$  que não serão substituídas e cada uma delas vai unir duas cópias distintas de  $H_{n-1}$ . Esse esquema é ilustrado na Figura 5. O subconjunto dos estados de  $H_n$  em que o maior disco está no pino  $p_i$  induz uma cópia  $H_{n-1}$ , pois os outros  $n - 1$  discos sempre podem ser movidos sobre  $d_n$  sem quebrar as regras do jogo, para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Essa propriedade pode ser observada na Figura 1. Portanto, as arestas remanescentes do  $C_6$  são as transições do disco maior  $d_n$ .

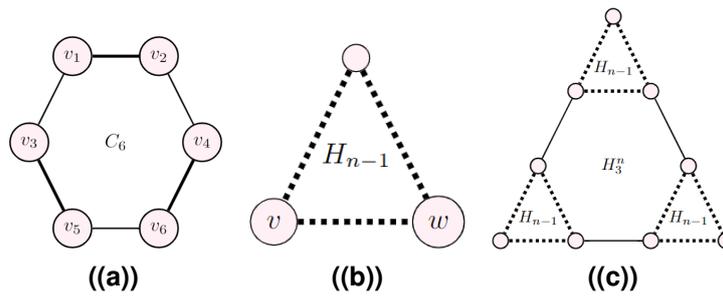


Figura 4. (a)  $C_6$ ; (b)  $H_{n-1}$ ; (c) Grafo  $H_n$  resultante da operação de enxerto.

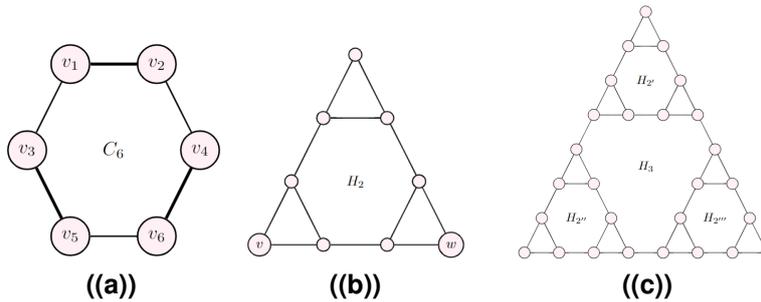


Figura 5. (a)  $C_6$ ; (b)  $H_2$ ; (c) Grafo  $H_3$  resultante da operação de enxerto.

#### 4. Considerações Finais

Neste resumo foi apresentada uma proposta de generalização da construção do grafo  $H_n$ , que é baseada no enxerto de cópias de  $H_{n-1}$  nas arestas de um emparelhamento perfeito de um  $C_6$ , resultando em um algoritmo recursivo de caso base  $H_1$ . Esta construção se deu a partir da observação de que no grafo da ToH, algumas estruturas triangulares se agrupam em torno de estruturas hexagonais. Então, foi definida uma operação que permitisse a generalização do grafo a partir dessas composições. A construção proposta para o grafo  $H_n$  usa somente elementos de teoria dos grafos, em contraponto ao existente na literatura, em que é usada a estrutura de triângulos de Sierpinski, baseada na teoria dos fractais.

#### Agradecimentos

Os autores fazem parte do grupo de pesquisa do ALGOX do CNPq (Algoritmos, Otimização e Complexidade Computacional) e do Programa de Pós-Graduação em Informática (PPGI) do IComp/UFAM. E recebeu apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES-PROEX) - Código de Financiamento 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM - por meio do projeto POSGRAD 2024-2025.

#### Referências

- Poole, D. G. (1994). The towers and triangles of professor claus (or, pascal knows hanoi). *Mathematics Magazine*, 67(5):323–344.
- Zhang, Z., Wu, S., Li, M., and Comellas, F. (2016). The number and degree distribution of spanning trees in the tower of hanoi graph. *Theoretical Computer Science*, 609:443–455.