

Coloração de identificação local no produto corona de ciclos e caminhos

Robson M. Oliveira¹ Márcia R. Cappelle¹ Hebert Coelho¹

¹Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Goiânia – GO – Brasil

robsonmedradooli@gmail.com, mcappelle@ufg.br, hebert@ufg.br

Abstract. A locally identifying coloring (or lid-coloring for short) in a graph is a proper coloring such that, for any edge uv , if u and v have distinct closed neighborhoods, the set of colors used on vertices of the closed neighborhoods of u and v are distinct. The lid-chromatic number of a graph G , denoted by $\chi_{lid}(G)$, is the minimum number of colors needed in any lid-coloring of G . We determine the lid-chromatic number of the corona product where the factors are bipartite graphs and also when they are cycles and/or paths, with at least one of the factors being non-bipartite. Additionally, we provide some lower bounds for the lid-chromatic number of the corona product of two graphs.

Resumo. Uma coloração de identificação local (lid-coloração) em um grafo é uma coloração própria tal que para qualquer aresta uv , se u e v têm vizinhanças fechadas distintas, então o conjunto de cores utilizadas sobre os vértices das vizinhanças fechadas de u e v são distintos. O número lid-cromático do grafo G , denotado por $\chi_{lid}(G)$, é o menor número de cores necessárias em qualquer lid-coloração de G . Neste trabalho, determinamos o número lid-cromático do produto corona em que os fatores são grafos bipartidos e também quando são ciclos e/ou caminhos, onde pelo menos um dos fatores não é bipartido. Além disso, fornecemos alguns limites inferiores para o número lid-cromático do produto corona de dois grafos.

1. Introdução

Consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo $G = (V, E)$, a vizinhança fechada de um vértice $v \in V(G)$ é o conjunto $N[v] = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\} \cup \{v\}$. Seja $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $N[S]$ o conjunto $\bigcup_{u \in S} N[u]$. Uma clique em um grafo G é um conjunto de vértices que são adjacentes dois a dois em G . Denotamos por C_n e P_n um ciclo e um caminho, respectivamente, de ordem n .

O problema da coloração própria de vértices consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. O número mínimo de cores necessárias para colorir propriamente um grafo G é seu número cromático, denotado por $\chi(G)$. Seja $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}^*$ uma coloração própria de vértices de G . Para $S \subseteq V(G)$, definimos $c(S)$ como o conjunto de cores atribuídas aos vértices em S . Uma coloração própria de vértices c de um grafo é chamada de coloração de identificação local (lid-coloração) se para cada par de vértices adjacentes u e v tem-se que se $N[u] \neq N[v]$, então $c(N[u]) \neq c(N[v])$. O número cromático de

identificação local do grafo G , denotado por $\chi_{lid}(G)$, é o menor número de cores necessárias em qualquer coloração de identificação local de G . Na Figura 1(a) temos um grafo G e sua lid-coloração mínima com $c(N[v_1]) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $c(N[v_2]) = \{1, 5\}$, $c(N[u_1]) = \{1, 2, 3\}$, $c(N[u_2]) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $c(N[u_3]) = \{1, 3, 4\}$.

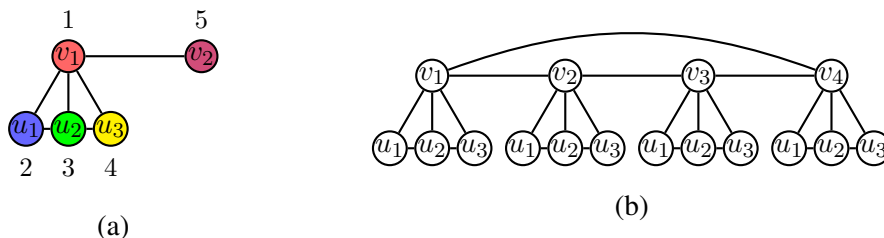


Figura 1: Em (a) grafo G com $\chi_{lid}(G) = 5$ e em (b) grafo $C_4 \odot P_3$.

A lid-coloração foi introduzida em 2012 [Esperet et al. 2012], quando foram apresentados vários limites para $\chi_{lid}(G)$ para diferentes famílias de grafos, incluindo grafos planares, algumas subclasses de grafos perfeitos e grafos com grau máximo limitado. Foi demonstrado que todo grafo bipartido G tem $\chi_{lid}(G) \leq 4$ e que decidir se um grafo bipartido é 3-lid-colorível é um problema NP-completo. Por outro lado, é possível decidir em tempo linear se uma árvore é 3-lid-colorível.

O número lid-cromático pode ser obtido em tempo linear em algumas classes de grafos com poucos P_4 's [Martins and Sampaio 2018]. Para qualquer grafo planar G , tem-se $\chi_{lid}(G) \leq 1280$ [Gonçalves et al. 2013]. Recentemente, [Bhyravarapu et al. 2023] determinaram o número lid-cromático dos produtos cartesiano e lexicográfico cujos fatores são caminhos e ciclos. Outros resultados sobre o número lid-cromático em produtos cartesianos foram apresentados em [Oliveira et al. 2023b], e em grafos cordais em [Oliveira et al. 2023a].

O *produto corona* $G \odot H$ de dois grafos G e H com m e n vértices, respectivamente, é definido como o grafo obtido a partir de G e H ao tomar uma cópia de G e m cópias de H e, em seguida, ligar com uma aresta cada vértice da i -ésima cópia de H ao i -ésimo vértice de G . Em $G \odot H$, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ denominam os vértices de G , e para $i \in [m]$, $H^{(i)}$ a cópia de H cujos vértices são adjacentes a v_i . Um exemplo de produto corona é exibido na Figura 1(b). O produto corona foi introduzido em 1970 [Frucht and Harary 1970] e tem sido investigado em relação a vários parâmetros de coloração [Yero et al. 2013, Mohan et al. 2017]. Neste trabalho, determinamos o número lid-cromático do produto corona em que os fatores são grafos bipartidos e também quando são ciclos e/ou caminhos, onde pelo menos um dos fatores não é bipartido. Além disso, fornecemos limites inferiores para o número lid-cromático de $G \odot H$.

2. Lid-coloração no produto corona

Denotamos o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ por $[n]$. Definimos dois vértices u e v como *gêmeos* se $N[u] = N[v]$. Um grafo é *livre de gêmeos* se não possui vértices gêmeos. É fácil verificar que em uma lid-coloração de $G \odot H$ cada cópia de H deve estar lid-colorida. Além disso, se $m, n \geq 2$, o grafo $G \odot H$ é livre de vértices gêmeos se e somente se H é livre de gêmeos.

Proposição 1 [Oliveira et al. 2023a] *Seja G um grafo com uma clique K de m vértices*

que não possui vértices gêmeos. Se c é uma lid-coloração de G , então $|c(N[K])| \geq m + \log_2 m$.

Teorema 2 Se G e H são grafos conexos com m e n vértices, respectivamente, onde $m \geq 2$, $n \geq 3$, e H é livre de gêmeos, então $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$.

Prova. Seja c uma lid-coloração de $G \odot H$. Observe que cada vértice v_i de G está contido numa clique de tamanho 3, digamos $C^{(i)}$, livre de gêmeos, formada pelo vértice v_i , e dois vértices adjacentes de $H^{(i)}$, digamos u_1^i e u_2^i . Pela Proposição 1, $|c(N[C^{(i)}])| \geq 5$ e consequentemente, $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 5$. Suponhamos por contradição que $\chi_{lid}(G \odot H) = 5$. Como $|c(N[C^{(i)}])| \geq 5$ e v_i é adjacente a todos os vértices em $N[C^{(i)}] \setminus \{v_i\}$, concluímos que $c(N[v_i]) = [5]$, para todo $i \in [m]$, o que é uma contradição. Portanto, $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$. \square

Teorema 3 [Esperet et al. 2012] Seja n um inteiro positivo. Então, $\chi_{lid}(P_2) = 2$ e para $n \geq 3$, $\chi_{lid}(P_n) = 3$ se n é ímpar, e $\chi_{lid}(P_n) = 4$ se n é par. Para $n \geq 4$, $\chi_{lid}(C_n) = 3$ se $n \equiv 0 \pmod{4}$, $\chi_{lid}(C_n) = 5$ se $n \in \{5, 7\}$, e $\chi_{lid}(C_n) = 4$, caso contrário.

Todo grafo bipartido G tem $\chi_{lid}(G) \leq 4$. Mostramos no Teorema 4 que o número lid-cromático do produto corona de dois grafos bipartidos conexos é 6.

Teorema 4 Sejam G e H dois grafos bipartidos conexos com m e n vértices, respectivamente, onde $m \geq 2$ e $n \geq 3$. Então, $\chi_{lid}(G \odot H) = 6$.

Prova. Como H é bipartido e portanto livre de gêmeos, pelo Teorema 2, $\chi_{lid}(G \odot H) \geq 6$. Para mostrar o limite superior, vamos construir uma lid-coloração c para o grafo $G \odot H$ com cardinalidade 6. Como o grafo G é bipartido, consideramos as partes A e B de $V(G)$. Para cada $i \in [m]$, atribuímos $c(v_i) = 5$ para v_i em A e $c(v_i) = 6$ para v_i em B . Note que existe um vértice u de H que não é adjacente a um vértice de grau um. Assim, para colorir os vértices de $H^{(i)}$ adjacentes a v_i em que $c(v_i) = 5$, definimos $c(u_j^i) = 1 + (d(u, u_j^i) \bmod 4)$ e no caso em que $c(v_i) = 6$, $c(u_j^i) = 2 + (d(u, u_j^i) \bmod 4)$. Observe que c é uma coloração própria e cada $H^{(i)}$ está lid-colorido. Além disso, a cor $1 \in c(N[v_i])$ quando $v_i \in A$, mas $1 \notin c(N[v_i])$ quando $v_i \in B$. Isso implica que para dois vértices adjacentes u e z em G no produto $G \odot H$, tem-se $c(N[u]) \neq c(N[z])$. Ainda, $5 \leq |c(N[v_i])| \leq 6$ e para todo $y \in V(H^{(i)})$, $|c(N[y])| \leq 4$, o que implica em $c(N[v_i]) \neq c(N[y])$. Portanto, c é uma lid-coloração de $G \odot H$ e $\chi_{lid}(G \odot H) \leq 6$. \square

No Teorema 5 apresentamos um limite inferior para $\chi_{lid}(G \odot H)$ em função de $\chi_{lid}(H)$, para o caso em que G é conexo.

Teorema 5 Sejam G e H dois grafos com m e n vértices, respectivamente, onde G é conexo, $m \geq 2$ e $n \geq 1$. Então, $\chi_{lid}(G \odot H) \geq \chi_{lid}(H) + 2$.

Prova. Seja $\chi_{lid}(H) = k$ e seja c uma lid-coloração mínima de $G \odot H$. É fácil verificar que $\chi_{lid}(G \odot H) \geq k + 1$. Suponhamos por contradição que $\chi_{lid}(G \odot H) = k + 1$ e então, que cada $H^{(i)}$ é colorido com as k cores em $[k]$. Sem perda de generalidade, assumamos que $c(v_i) = k + 1$. Claramente, $c(N[v_i]) = [k + 1]$. Seja v_j um vizinho de v_i em G . Logo, $c(V(H^{(j)}) \cup \{v_j\}) = [k + 1]$ o que implica em $c(N[v_i]) = c(N[v_j]) = [k + 1]$, o que contradiz que c é uma lid-coloração de $G \odot H$. Portanto, $\chi_{lid}(G \odot H) \geq k + 2$. \square

Consideramos a lid-coloração no produto corona em que os fatores são ciclos e/ou caminhos. É fácil verificar que quando H é conexo, $\chi_{lid}(H) + 1 \leq \chi_{lid}(P_1 \odot H) \leq \chi_{lid}(H) + 2$. Os outros casos são apresentados nos Teoremas 6 e 7. O Teorema 6 pode ser verificado por inspeção. Utilizaremos a seguinte notação: dada uma sequência M de cores, $(M)^*$ indica que a sequência M pode ser repetida zero ou mais vezes, $(M)^{op}$ indica que a sequência M é opcional e $(M_1 \cup M_2)$ indica que uma das sequências deve ser utilizada.

Teorema 6 Se $G \in \{P_m, C_m\}$ com $m \geq 2$, então **i)** se $G \not\cong C_3$, $\chi_{lid}(G \odot P_1) = 4$, **ii)** $\chi_{lid}(C_3 \odot P_1) = 5$, **iii)** $\chi_{lid}(G \odot P_2) = 5$ e **iv)** $\chi_{lid}(G \odot P_3) = \chi_{lid}(G \odot C_3) = 6$.

Teorema 7 Seja $G \odot H$ tal que $G \in \{P_m, C_m\}$ e $H \in \{P_n, C_n\}$ com $m \geq 2$ e $n \geq 4$. Se $H \in \{C_5, C_7\}$, então $\chi_{lid}(G \odot H) = 7$, caso contrário $\chi_{lid}(G \odot H) = 6$.

Prova. Se ambos G e H não são ciclos ímpares, então eles são bipartidos e o resultado segue do Teorema 4. Consideramos, então, os casos em que pelo menos um de G e H é um ciclo ímpar. Os limites inferiores seguem do Teorema 2 e quando $H \in \{C_5, C_7\}$ dos Teoremas 3 e 5. Para os limite superiores, vamos apresentar lid-colorações c para $G \odot H$ com cardinalidades 6 e 7, conforme os casos descritos. Dividimos a prova em dois casos:

Caso 1: G é bipartido. Neste caso G é um caminho ou é um ciclo par e H é um ciclo ímpar. Para $1 \leq i \leq m$, fazemos $c(v_i) = 4$ se i é ímpar e $c(v_i) = 5$ se i é par. Para colorir os vértices de cada $H^{(i)}$ consideramos dois subcasos: **Subcaso 1.1:** $H \notin \{C_5, C_7\}$. Neste caso, para uma coloração com 6 cores, usaremos a sequência $(12d3d1232)(d2)^{op}(1232)^*$, onde $d = 4$ se i é par e $d = 6$ se i é ímpar. Temos $c(N[v_i]) = [6]$ se i é ímpar e $c(N[v_i]) = [5]$ se i é par. **Subcaso 1.2:** $H \in \{C_5, C_7\}$. Colorimos $H^{(i)}$ com a sequência $(13267)(63)^{op}$, se i é ímpar e $(13246)(43)^{op}$ se i é par, para obter uma coloração com 7 cores. Temos $c(N[v_i]) = [7]$ se i é ímpar e $c(N[v_i]) = [6]$ se i é par.

Caso 2: G é um ciclo ímpar. Neste caso n é par ou ímpar e H é um ciclo ou um caminho. Fazemos $c(v_i) = 4$ se i é ímpar e $c(v_i) = 5$ se i é par, para $1 \leq i \leq m - 1$, com $c(v_m) = 1$. Para colorir os vértices de cada $H^{(i)}$ consideramos dois subcasos: **Subcaso 2.1:** $H \notin \{C_5, C_7\}$. Neste caso, para uma coloração com 6 cores, usaremos a sequência $(12d3)^*(d1232 \cup d2 \cup d1232d2)^{op}$ quando $H \cong C_n$ e a sequência $(123d)^*(1 \cup 12 \cup 123)^{op}$ quando $H \cong P_n$, onde, para $1 \leq i \leq m - 1$, $d = 4$ se i é par e $d = 6$ se i é ímpar. Se $H \cong C_n$, então $H^{(m)}$ é colorido com $(2465)^*(62454 \cup 64 \cup 6245464)^{op}$. Se $H \cong P_n$, $H^{(m)}$ é colorido com $(2456)^*(2 \cup 24 \cup 245)^{op}$. Para $1 \leq i \leq m - 1$ temos $c(N[v_i]) = [6]$ se i é ímpar e $c(N[v_i]) = [5]$ se i é par. Ainda, $c(N[v_m]) = [6] \setminus \{3\}$. **Subcaso 2.2:** $H \in \{C_5, C_7\}$. Colorimos $G \odot H$ com 7 cores como segue. Para $1 \leq i \leq m - 1$, colorimos os vértices de cada $H^{(i)}$ com a sequência $(13267)(63)^{op}$, se i é ímpar e $(13246)(43)^{op}$ se i é par. Utilizamos a sequência $(23457)(53)^{op}$ em $H^{(m)}$. Para $1 \leq i \leq m - 1$ temos $c(N[v_i]) = [7]$ se i é ímpar e $c(N[v_i]) = [6]$ se i é par. Ainda, $c(N[v_m]) = [7] \setminus \{6\}$. Além disso, em todos os casos, para $u^{(i)} \in V(H^{(i)})$ temos $|c(N[u^{(i)}])| \leq 4$, enquanto $|c(N[v_i])| \geq 5$, o que implica que $c(N[u^{(i)}]) \neq c(N[v_i])$. \square

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido por meio de bolsa de estudos.

Referências

- Bhyravarapu, S., Kumari, S., and Reddy, I. V. (2023). On locally identifying coloring of graphs. In *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, pages 147–158. Springer.
- Esperet, L., Gravier, S., Montassier, M., Ochem, P., and Parreau, A. (2012). Locally identifying coloring of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(2):#P40.
- Frucht, R. and Harary, F. (1970). On the corona of two graphs.
- Gonçalves, D., Parreau, A., and Pinlou, A. (2013). Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18):2946–2951.
- Martins, N. and Sampaio, R. (2018). Locally identifying coloring of graphs with few p4s. *Theoretical Computer Science*, 707:69–76.
- Mohan, S., Geetha, J., and Somasundaram, K. (2017). Total coloring of corona product of two graphs. *Australas. J Comb.*, 68:15–22.
- Oliveira, M. R., Cappelle, R. M., and Coelho, H. (2023a). Locally identifying coloring in some chordal graphs. *Matemática Contemporânea*, 22:152–160.
- Oliveira, R. M., Cappelle, M. R., and Coelho, H. (2023b). Coloração de identificação local em produto cartesiano. In *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação*, pages 35–39. SBC.
- Yero, I. G., Kuziak, D., and Rondón Aguilar, A. (2013). Coloring, location and domination of corona graphs. *Aequationes mathematicae*, 86:1–21.