

Representações de grafos Split e Ciclo EPG em grades minimais

João Vitor Reis Dias¹, Tanilson Dias dos Santos¹

¹Universidade Federal do Tocantins – Palmas, TO — Brazil.

reis.dias@mail.uft.edu.br, tanilson.dias@mail.uft.edu.br

Abstract. *In this article, we address the construction of minimal representations of B_1 -EPG in Split graphs, particularly focusing on the Threshold subclass, and Cycle graphs.*

Resumo. *No presente artigo, abordamos a construção de representações minimais B_1 -EPG em grafos Split, em particular a subclasse Threshold, e grafos Ciclo.*

1. Introdução

A sigla EPG vem da expressão (em inglês) Edge-intersection Graphs of Paths on a Grid, traduzido como *Grafos de aresta-interseção de caminhos em uma grade*, os quais foram estabelecidos por [Golubic et al. 2009]. Tal classe é definida pela representação de grafos de forma que os vértices são representados por caminhos em uma grade hospedeira, e as arestas são definidas pela interseção entre certos caminhos

Além disso, [Golubic et al. 2009] classifica os grafos EPG com base no número máximo de dobras permitidas em cada caminho, denominado “bend number”. Um grafo é B_k -EPG se cada caminho na sua representação EPG tem no máximo k dobras. Esta classificação é hierárquica, onde os grafos B_{k+1} -EPG incluem automaticamente os grafos B_k -EPG.

O estudo de grafos EPG possui relevância prática no contexto da otimização do layout de circuitos digitais, Para mais referências veja [Brady and Sarrafzadeh 1990], [Molitor 1991] e [Sinden 1966].

Embora seja uma classe recentemente estudada, os grafos EPG têm demonstrado resultados significativos, especialmente no que diz respeito à classificação de determinadas classes de grafos em relação ao número máximo de dobras necessárias para sua representação. Por exemplo, em [Golubic et al. 2009], é estabelecido que a classe de grafos de intervalo é equivalente à classe de grafos B_0 -EPG.

Além disso, a classe EPG Split tem sido objeto de estudo em várias pesquisas, como [Golubic et al. 2009], [Asinowski and Ries 2012], [Cameron et al. 2016], [Deniz et al. 2018], [Deniz et al. 2021]. Esses estudos têm abordado condições de existência e propriedades relacionadas aos grafos B_1 -EPG. Outra análise interessante foi conduzida em [dos Santos Marinho et al. 2023], que examina as propriedades de representação dos grafos Split em B_2 -EPG.

Em [Golubic et al. 2009] são apresentados resultados referentes a formas de representação de ciclo em B_1 -EPG. No contexto deste artigo, apresentamos alguns resultados relevantes relacionados às classes EPG Split e Ciclo EPG.

A seguir, apresentamos alguns conceitos básicos necessários para um melhor entendimento do artigo.

2. Preliminares

Uma *clique* é um subconjunto de um grafo no qual todos os vértices são adjacentes entre si. Uma *clique maximal* é uma clique na qual a adição de qualquer outro vértice ao subconjunto faz com que a propriedade de clique não seja mantida.

Um *conjunto independente* é um subconjunto de um grafo no qual nenhum dos vértices é adjacente a qualquer outro vértice do subconjunto.

A classe *Split* refere-se ao conjunto de grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, $V = K \cup S$, onde o primeiro forma uma clique K e o segundo subconjunto de vértices forma um conjunto independente S .

Segundo [da Fonseca Ramos 2014], os grafos threshold são uma subclasse dos grafos split em que as vizinhança de todos os vértices são aninhadas, ou seja para quaisquer dois vértices u e v de um grafo threshold, $N(u) \subseteq N(v)$ ou $N(v) \subseteq N(u)$.

Uma grade, $Q_{x \times y}$, é o espaço geométrico formado por coordenadas inteiras ortogonais, onde x representa o número de linhas e y o número de colunas, no qual cada par de coordenada de inteiros representa um ponto ou vértice da grade. A grade é potencialmente infinita e supomos que ela sempre consegue hospedar qualquer representação.

Em qualquer representação B_1 -EPG, uma clique K de um grafo G é sempre representada como *edge-clique* ou *claw-clique*, ver [Golubic et al. 2009], descrito na Figura 1. Observe que em uma edge-clique, todos os caminhos compartilham uma aresta de grade em comum. Enquanto em uma claw-clique, todos os caminhos compartilham um ponto da grade em comum, sendo que não existe uma aresta compartilhada por todos os caminhos da grade.

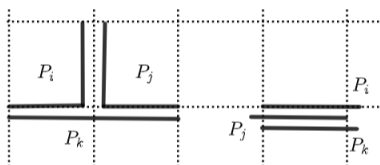


Figura 1. Representação claw-clique e edge-clique

A seguir apresentamos os resultados preliminares desta pesquisa.

3. Resultados

A seguir, apresentamos resultados envolvendo grafos Threshold e Ciclo, onde limitamos a grade de acordo com a quantidade de cliques maximais do grafo. É válido ressaltar que reconhecimento de cliques maximais é um problema difícil computacionalmente, porém para o caso da classe de grafos Cordais, na qual a classe Threshold está inclusa é simples [Chmeiss and Jégou 1997]. Sendo para grafo Ciclo simples também.

Lema 1. *Seja G um grafo threshold com μ cliques maximais, podemos representar G utilizando μ arestas da grade.*

Demonstração. Sabemos que threshold está (é subclasse) na intersecção de:

1. intervalo;
2. Split;

Por 1, sabemos que existe um modelo de intersecção de segmentos sobre uma reta que representa G .

Logo, por 1, concluímos que G é B_0 -EPG, pois a própria representação de intervalo pode ser imersa em uma grade e se tornar uma representação B_0 -EPG [dos Santos Marinho et al. 2023].

Considere uma grade $Q_{1 \times \mu}$ com uma linha l_0 e colunas de c_0, \dots, c_μ da esquerda para a direita.

Sendo G , um grafo threshold conexo, podemos representar G como um conjunto de cliques conexas. Desse modo, primeiramente serão identificadas as cliques maximais de G , as quais serão inseridas no vetor *cliques*. Como, G será representado a partir de suas cliques maximais, iremos representar os elementos de cada clique como caminhos P_i na horizontal como uma edge-clique indo de c_i até c_{i+1} , sendo os caminhos P_i de cada clique dispostos verticalmente.

Pelo fato de que em um grafo threshold, o conjunto vizinhança dos vértices do conjunto independente são todos da forma $N(s_i) \subseteq N(s_j)$ ou $N(s_j) \subseteq N(s_i)$, como mostrado em [da Fonseca Ramos 2014]. Logo, podemos afirmar que o conjunto vizinhança de todos os vértices s_i estão inclusos no conjunto vizinhança de um vértice s_j .

Como G é formado por caminhos com vizinhança aninhada, iremos ordenar as cliques maximais em ordem decrescente em relação ao número de caminhos, de modo que se o vetor cliques está ordenado da forma *cliques* = s_1, s_2, \dots, s_n , necessariamente $N(s_1) \subseteq N(s_2) \dots \subseteq N(s_n)$.

Dessa forma, a representação será feita de modo que cada aresta da grade seja hospedeira de uma clique maximal de G , na qual estará presente um subconjunto $K' \subseteq K$ mais um caminho P_i pertencente a S , representados na linha l_0 da coluna c_i até c_{i+1} . Sendo que a clique maximal representada na linha l_0 da coluna c_{i+1} até c_{i+2} obrigatoriamente será formada de um subconjunto $K'' \subseteq K'$ mais um caminho P_j . \square

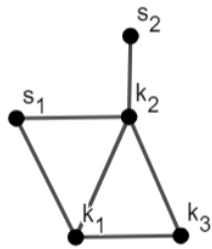


Figura 2. Grafo G

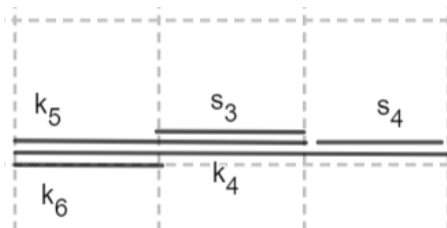


Figura 3. Representação mínima de G

Lema 2. *Seja G um grafo ciclo com μ cliques maximais, podemos criar uma representação mínima B_1 -EPG para G utilizando μ arestas da grade a partir de uma grade $Q_{2 \times \lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$.*

Demonstração. Em um grafo ciclo, observamos que fixando 2 linhas/colunas sempre é possível representar G de modo que todas as arestas da grade sejam preenchidas por uma

clique maximal quando μ está na posição $4 + 3n$, sendo n natural e $\mu \geq 3$. Portanto, necessariamente tal representação é mínima já que o número de cliques maximais é igual ao número de arestas na grade.

Já nos casos em que μ não pertence a essa posição, será preciso que um ou dois caminhos na representação ocupem mais de uma aresta. Não é possível representar tais grafos em uma grade menor, pois o grafo C_n precisa de n arestas de grade, no mínimo, para ser representado e, tirando uma linha ou coluna, não há arestas de grade suficientes. A seguir, mostramos as instruções para realizar tal representação.

Considere uma grade com c_0 e c_1 como colunas e $l_0, l_1, \dots, l_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$ como linhas. Caso $|V(G)| \leq 3$, represente G como uma edge-clique na linha l_0 da coluna c_0 até c_1 .

Nos outros casos, a representação inicia com um caminho P_0 horizontal de c_0 até c_1 , que continua na vertical de l_0 até l_1 . Os caminhos são imersos na grade na vertical até a linha $l_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$. Caso μ não esteja em alguma posição sequencia $s = 4 + 3n$, o caminho $P_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil - 1}$ deverá ocupar mais de uma aresta para que chegue à linha $l_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$.

Nessa linha o próximo caminho é representado na horizontal de c_1 até c_0 , que continua na vertical de $l_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$ até $l_{\lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil - 1}$.

Após cada representação de um caminho de l_i até l_{i-1} , esse mesmo caminho continua na horizontal c_1 até c_0 . Em seguida, a representação de outro caminho na linha l_{i-1} de c_1 até c_0 , de modo a aproveitar as arestas do interior da grade. Por fim, chegando novamente na linha l_0 , o último caminho continua horizontalmente de c_0 até c_1 , fechando o ciclo. \square

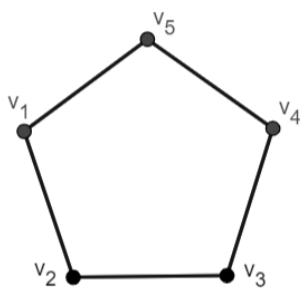


Figura 4. Grafo C_5

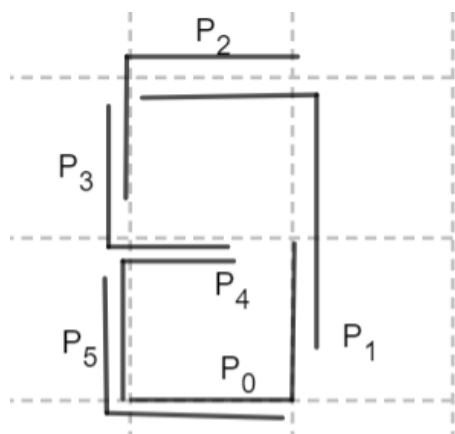


Figura 5. Representação mínima de C_5

4. Considerações Finais

Exploramos o estudo de representações minimais em Grafos EPG e, com base nos resultados alcançados, desenvolvemos algoritmos para construir representações minimais de Grafos Threshold, de modo que dado um grafo G com μ cliques maximais criamos uma representação em uma grade $Q_{1 \times \mu}$, e Ciclo EPG, na qual dado um grafo ciclo com μ cliques maximais criamos uma representação numa grade $Q_{2 \times \lceil \frac{2+\mu}{3} \rceil}$.

Referências

- Asinowski, A. and Ries, B. (2012). Some properties of edge intersection graphs of single-bend paths on a grid. *Discrete Mathematics*, 312(2):427–440.
- Brady, M. L. and Sarrafzadeh, M. (1990). Stretching a knock-knee layout for multilayer wiring. *IEEE Transactions on Computers*, 39(1):148–151.
- Cameron, K., Chaplick, S., and Hoàng, C. T. (2016). Edge intersection graphs of L-shaped paths in grids. *Discrete Applied Mathematics*, 210:185–194.
- Chmeiss, A. and Jégou, P. (1997). A generalization of chordal graphs and the maximum clique problem. *Information Processing Letters*, 62(2):61–66.
- da Fonseca Ramos, I. (2014). *O POSTO DE UMA CONVEXIDADE DE GRAFOS*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Deniz, Z., Nivelles, S., Ries, B., and Schindl, D. (2018). On split B1-EPG graphs. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 361–375. Springer.
- Deniz, Z., Nivelles, S., Ries, B., and Schindl, D. (2021). On some subclasses of split B1-EPG graphs. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 625–636. Springer.
- dos Santos Marinho, L. F., Silva, K. A., and dos Santos, T. D. (2023). B2-EPG split. *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, 4(1):1–7.
- Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., and Stern, M. (2009). Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks: An International Journal*, 54(3):130–138.
- Molitor, P. (1991). A survey on wiring. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 27(1):3–19.
- Sinden, F. W. (1966). Topology of thin film RC circuits. *Bell System Technical Journal*, 45(9):1639–1662.