Caracterização de 2-atribuição de papéis em produto corona de dois grafos

Jarlilson Guajajara[1], Julliano Rosa Nascimento[1]

[1]Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil

jarlilsonguajajara@discente.ufg.br, jullianonascimento@ufg.br

Abstract. *The corona product of G and H is the graph $G \circ H$ obtained by taking a copy of G, $|V(G)|$ copies of H, and making the i-th vertex of G adjacent to every vertex of the i-th copy of H, where $1 \leq i \leq |V(G)|$. An r-assignment is a function from the vertices of G to a set of roles of size r such that, for any vertices mapped to the same role, their neighborhoods have the same image. In this paper, we present the characterization of 2-role assignment for the corona product of two graphs, considering all possible role graphs with two vertices.*

Resumo. *O produto corona de G e H é o grafo $G \circ H$ obtido tomando uma cópia de G, $|V(G)|$ cópias de H, e tornando o i-ésimo vértice de G adjacente a cada vértice da i-ésima cópia de H, onde $1 \leq i \leq |V(G)|$. Uma r-atribuição é uma função dos vértices de G para um conjunto de papéis de tamanho r tal que, para quaisquer vértices mapeados para o mesmo papel, suas vizinhanças têm a mesma imagem. Neste artigo, apresentamos a caracterização da 2-atribuição de papéis para o produto corona de dois grafos, considerando todos os grafos de papéis possíveis com dois vértices.*

1. Introdução

Para um grafo G, seus conjuntos de vértices e arestas são denotados por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. A *vizinhança aberta* de um vértice v, denotada por $N_G(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v no grafo G. A *vizinhança fechada* de um vértice v, denotada por $N_G[v]$, corresponde ao conjunto $N_G(v) \cup \{v\}$. Um *conjunto independente dominante* I de um grafo G é um subconjunto de $V(G)$ no qual nenhum par de vértices em I é adjacente e todo vértice em $V(G) \setminus I$ é vizinho de algum vértice em I. Para notações e conceitos adicionais, nos referimos a [Bondy e Murty 2008, Diestel 2000].

O conceito de atribuição de papéis ou coloração de papéis foi introduzido em 1991 por [Everett e Borgatti 1991]. Desde então tem sido alvo de estudos e encontra aplicações em redes sociais, como em [Pekeč e Roberts 2001]. Seja G um grafo simples e R um grafo possivelmente com laço. Um *homomorfismo* de grafos de um grafo de G para um grafo R é uma função $p : V(G) \to V(R)$ tal que $p(u)p(v) \in E(R)$ sempre que $uv \in E(G)$. Se um homomorfismo p é sobrejetor e a restrição de p à vizinhança de cada $u \in V(G)$ é sobrejetora, isto é, a função $p_u : N_G(u) \to N_R(p(u))$ é sobrejetora, então p é dito um *homomorfismo localmente sobrejetor* de G para R ou uma *R-atribuição de papéis* de G. Dizemos que p é uma *r-atribuição de papéis* de G quando $r = |V(R)|$ e R é chamado *grafo de papéis*. Denotamos $V(R) = \{1, 2, \ldots, r\}$.

Sabe-se que o problema de se determinar se um grafo G possui uma r-atribuição de papéis é NP-completo para $r \geq 2$ fixo, mesmo quando G é um grafo planar, por [Purcell e Rombach 2015]. A dificuldade computacional para $r = 2$ é conhecida desde 2001, por [Roberts e Sheng 2001]. Em especial, tal referência apresenta caracterizações e propriedades úteis para obtermos nossos resultados.

Vale destacar que resultados de complexidade também são conhecidos para produto Cartesiano entre dois grafos. Recentemente, [Castonguay et al. 2022] mostraram uma dicotomia para o problema. Enquanto o produto Cartesiano de dois grafos sempre admite uma 2-atribuição de papéis, o problema permanece NP-completo para qualquer $r \geq 3$ fixo.

Neste trabalho, o foco principal será o estudo do problema de 2-atribuição de papéis para o produto corona de dois grafos.

O produto corona foi introduzido em 1970 por [Frucht e Harary 1970]. Sejam G um grafo com n vértices e H um grafo com m vértices. O *produto corona* de G e H é o grafo $G \circ H$ construído tomando-se uma cópia de G e n cópias de H. A conexão entre eles é estabelecida adicionando-se uma aresta do i-ésimo vértice de G, para $1 \leq i \leq n$, a cada vértice na i-ésima cópia de H. Usamos a notação $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $V(H) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ e para cada cópia H_i de H em $G \circ H$, definimos $V(H_i) = \{u_{1,i}, u_{2,i}, \ldots, u_{m,i}\}$. Veja um exemplo na Figura 1.

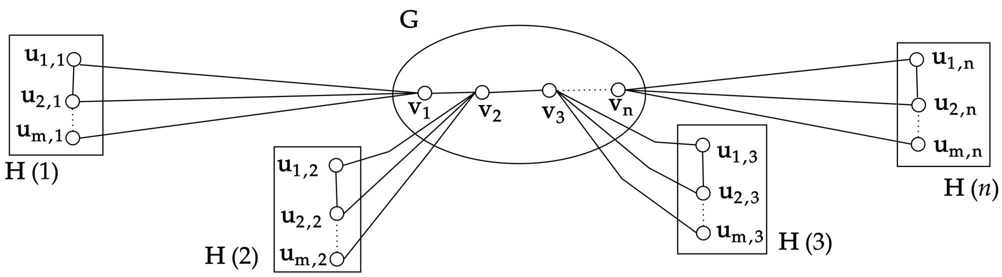

Figura 1. Representação do produto Corona $G \circ H$.

A estrutura "central-periférica" do produto corona pode servir como modelo para representar relações hierárquicas. Por exemplo, [Sharma et al. 2019] estuda produtos corona como modelos para processos gerativos de redes com estrutura hierárquica que incorporam a duplicação de propriedades. O estudo de atribuição de papéis neste produto pode, então, favorecer estudos vindouros na identificação de entidades com propriedades ou papéis duplicados dentro do mesmo nível hierárquico em uma rede.

Neste artigo, apresentamos a caracterização da 2-atribuição de papéis para o produto corona de dois grafos G e H com $|V(G)|, |V(H)| \geq 1$. Mostramos para cada grafo R, dentre os seis grafos possíveis decorrentes de uma 2-atribuição de papéis (cf. Figura 2), quais grafos $G \circ H$ possuem e não possuem R-atribuição de papéis. Nossos resultados seguem na Seção 2.

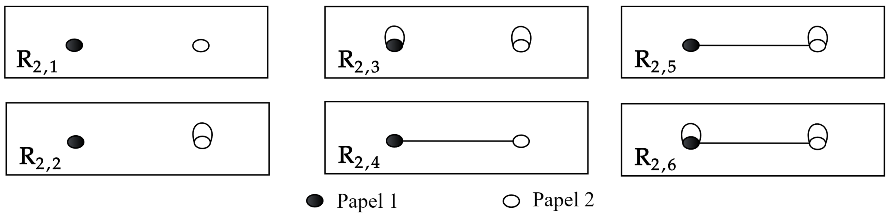

Figura 2. **Grafos de papéis decorrentes de uma 2-atribuição de papéis.**

2. Resultados

Iniciamos esta seção evidenciando alguns resultados sobre a 2-atribuição de papéis obtidos por [Roberts e Sheng 2001]. Relembramos os grafos $R_{2,i}$, para $i = 1, 2, 3, 4$, da Figura 2.

Teorema 1. *([Roberts e Sheng 2001]) Seja G um grafo e I_0 o conjunto de vértices isolados de G. O grafo G possui uma 2-atribuição de papéis com grafo de papéis:*

(i) R_1 *se e somente se* $I_0 = V(G)$*;*
(ii) R_2 *se e somente se* $I_0 \neq V(G)$ *e* $I_0 \neq \emptyset$*;*
(iii) R_3 *se e somente se* $I_0 = \emptyset$ *e G é desconexo;*
(iv) R_4*-atribuição de papéis se e somente se* $I_0 = \emptyset$ *e G é bipartido.*

Discutimos na sequência, a 2-atribuição de papéis em $G \circ H$ quando o grafo de papéis é desconexo, isto é $R_{2,i}$, para $i = 1, 2, 3$.

Como consideramos grafos G e H com pelo menos um vértice cada um, temos que $|E(G \circ H)| \geq 1$. Assim, pelo Teorema $1(i)$, concluímos que $G \circ H$ não possui $R_{2,1}$-atribuição de papéis.

Pelo Teorema $1(ii)$, como $G \circ H$ não possui vértices isolados, é direta a conclusão de que $G \circ H$ não possui $R_{2,2}$-atribuição de papéis.

Por fim, observamos pela definição de produto corona que $G \circ H$ é desconexo se e somente se G é desconexo. Desta forma, como $G \circ H$ não possui vértices isolados, o Teorema $1(iii)$ implica que $G \circ H$ tem uma $R_{2,3}$-atribuição de papéis se e somente se G é desconexo.

Ao analisar os grafos de papéis conexos decorrentes de uma 2-atribuição de papéis, relembramos os grafos $R_{2,i}$, para $i = 4, 5, 6$, da Figura 2.

Pelo Teorema $1(iv)$, sabemos que um grafo G tem uma $R_{2,4}$-atribuição de papéis se e somente se G não tem vértices isolados e G é bipartido. O produto corona $G \circ H$ é bipartido se e somente se G é bipartido e H não tem arestas. Assim, claramente, $G \circ H$ tem uma $R_{2,4}$-atribuição de papéis se e somente se G é bipartido e H não tem arestas.

Para os grafos conexos $R_{2,5}$ e $R_{2,6}$, nossos resultados seguem nos Teoremas 2 e 3, respectivamente.

Teorema 2. *Sejam G e H dois grafos. O produto corona $G \circ H$ tem uma $R_{2,5}$-atribuição de papéis se e somente se G não tem vértice isolado ou H tem ao menos uma aresta.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja p uma $R_{2,5}$-atribuição de papéis de $G \circ H$. Relembramos que $V(R_{2,5}) = \{1, 2\}$. Por contradição, suponha que G tem vértice isolado, digamos v_1, e

$|E(H)| = 0$. Por hipótese, temos que $H_1 \cup \{v_1\}$ é uma componente conexa de $G \circ H$ isomorfa ao grafo bipartido completo $K_{1,|V(H)|}$. Como $N_{R_{2,5}}(1) = 2$, podemos assumir que $p(u_{i,1}) = 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Porém observe que $p(v_1) \notin \{1, 2\}$, uma contradição.

($\Leftarrow$) Suponha que G não tem vértice isolado ou H tem ao menos uma aresta. Seja I um conjunto independente dominante de H. Notamos que I existe e $I \neq \emptyset$. Para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, definimos uma função $p : V(G \circ H) \to \{1, 2\}$ como

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = u_{i,j} \text{ com } u_i \in I, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para concluir que p é uma $R_{2,5}$-atribuição de papéis, mostramos primeiro que os vértices com papel 1 são vizinhos apenas de vértices com papel 2. Seja $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $u_i \in I$. Pela definição de p, temos que $p(u_{i,j}) = 1$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como I é um conjunto independente dominante de H, temos que $p(N_{H_j}(u_{i,j})) = \{2\}$. Além disso pela definição de p, temos que $p(N_G(u_{i,j})) = p(v_j) = \{2\}$.

Agora, consideramos os vértices $x \in V(G \circ H)$ tais que $p(x) = 2$. Mostramos que x possui vizinhos com papel $1, 2$. Se $x = u_{i,j}$, para $u_i \notin I$, a definição de p implica que $p(v_j) = 2$. Logo x tem vizinho com papel 2. Além disso, como I é um conjunto independente dominante, temos que x possui um vizinho $y \in V(H_i)$ tal que $p(y) = 1$. Agora seja $x = v_j$. Como $I \neq \emptyset$, concluímos que x tem vizinho com papel 1 em H_j. Se G não tem vértice isolado, temos que x tem um vizinho $y \in V(G)$ tal que $p(y) = 2$. Por outro lado, se G tem vértice isolado, como H tem ao menos uma aresta, concluímos também que x tem um vizinho $y \in V(H_j)$ tal que $p(y) = 2$. □

Teorema 3. *Sejam G e H dois grafos. O produto corona $G \circ H$ tem uma $R_{2,6}$-atribuição de papéis se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. *H não tem vértices isolados; e*
2. *cada componente conexa de H tem pelo menos 3 vértices ou G não tem vértices isolados.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja p uma $R_{2,6}$-atribuição de papéis de $G \circ H$. Queremos mostrar que as afirmações (1) e (2) são verdadeiras. Para isso, suponha por contradição que (1) ou (2) não sejam verdadeiras. Para (1), suponha que existe um vértice x isolado em H. Como u é isolado em H, pela definição de produto corona, temos que $|N_{G \circ H}(u)| = 1$. Como $p(N_{G \circ H}(u)) = \{1, 2\}$, temos uma contradição.

Para (2), a sua negação corresponde a: cada componente conexa de H tem no máximo 2 vértices e G tem vértices isolados. Então, suponha que para toda componente conexa H' de H, $|V(H')| \leq 2$ e G tem um vértice isolado, digamos v. Como v é adjacente a todo vértice da sua respectiva cópia em H. Isso implica que o grafo induzido por $\{v\} \cup V(H')$ é uma componente conexa de $G \circ H$ com no máximo 3 vértices. Logo o grafo induzido por $\{v\} \cup V(H')$ não possui uma $R_{2,6}$-atribuição, uma contradição.

Observadas as contradições em todos os casos, concluímos que se o produto corona $G \circ H$ tem uma $R_{2,6}$-atribuição de papéis, então as condições (1) e (2) são verdadeiras.

($\Leftarrow$) Suponha que (1) e (2) são satisfeitas. Assim, temos dois casos: (I) H não tem vértices isolados e cada componente conexa de H tem pelo menos 3 vértices, ou (II) H não tem vértices isolados e G não tem vértices isolados. Mostramos funções para ambos os casos.

No Caso (II), G e H são grafos sem vértices isolados. Para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, definimos uma função $p : V(G \circ H) \to \{1, 2\}$ como

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = v_i, \\ 2, & \text{se } x = u_{j,i}. \end{cases}$$

No caso contrário, suponha que H não tem vértices isolados e cada componente conexa de H tem pelo menos 3 vértices. Para todo $i = 1, \ldots, n$, definimos uma função $q : V(G \circ H) \to \{1, 2\}$ como

$$q(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{v_i, u_{1,i}\} \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definidas as funções p e q conclui-se que ambas correspondem a uma $R_{2,6}$-atribuição de papéis. $\square$

Referências

Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2022). Computing some role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Operations Research*, 56(1):115–121.

Diestel, R. (2000). *Graph theory*. New York, USA, Springer-Verlag.

Everett, M. G. e Borgatti, S. (1991). Role colouring a graph. *Mathematical Social Sciences*, 21(2):183–188.

Frucht, R. e Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *aequationes mathematicae*, 4(3):322–325.

Pekeč, A. e Roberts, F. S. (2001). The role assignment model nearly fits most social networks. *Mathematical Social Sciences*, 41(3):275–293.

Purcell, C. e Rombach, P. (2015). On the complexity of role colouring planar graphs, trees and cographs. *Journal of Discrete Algorithms*, 35:1–8.

Roberts, F. S. e Sheng, L. (2001). How hard is it to determine if a graph has a 2-role assignment? *Networks*, 37(2):67–73.

Sharma, R., Adhikari, B., e Krueger, T. (2019). Self-organized corona graphs: A deterministic complex network model with hierarchical structure. *Advances in Complex Systems*, 22(06):1950019.