Algoritmos FPT para reconhecer grafos bem cobertos

Rafael T. Araújo[1], Sulamita Klein[2], Rudini Sampaio[1]

[1]Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brazil

[2]Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

{rafaelteixeira,rudini}@lia.ufc.br, sula@cos.ufrj.br

Resumo. *Dado um grafo G, sejam $vc(G)$ e $vc^+(G)$ os tamanhos de uma cobertura mínima de vértices e de uma máxima cobertura minimal de vértices, respectivamente. Dizemos que G é bem coberto se $vc(G) = vc^+(G)$ (ou seja, todas as coberturas minimais são mínimas). É coNP-completo decidir se um grafo é bem coberto. Nesse artigo, obtemos algoritmos FPT de tempos $O^*(2^{vc})$ e $O^*(1.4656^{vc^+})$ para decidir se um grafo é bem coberto, parametrizados por $vc(G)$ e $vc^+(G)$, respectivamente, melhorando resultados de Boria et al. em 2015. Também obtemos algoritmo FPT parametrizado por $\alpha(G) = n-vc(G)$ em grafos d-degenerados, que inclui grafos com genus limitado (como grafos planares) e grafos com grau máximo limitado. Finalmente usamos a decomposição primeval para obter algoritmo linear para grafos P_4-laden estendidos e grafos $(q, q-4)$, que é FPT parametrizado por q, melhorando resultados de Klein et al. em 2013.*

1. Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $C, I \subseteq V$. Dizemos que C é *cobertura* se toda aresta de G tem extremidade em C e que I é *independente* se todos os vértices em I são não adjacentes entre si. Sabe-se que C é cobertura se e somente se $V - C$ é independente. Seja $vc(G)$ o tamanho de uma cobertura mínima e $\alpha(G) = n-vc(G)$ o tamanho do maior conjunto independente de G. Um grafo é *bem coberto* se todas coberturas minimais são mínimas (ou também se todos conjuntos independentes maximais são máximos). Grafos bem cobertos foram introduzidos em 1970 por [Plummer 1970]. São interessantes pois o algoritmo guloso que gera um conjunto independente maximal sempre gera um conjunto independente máximo (e também uma cobertura mínima). Porém, decidir se um grafo é bem coberto é coNP-completo mesmo em grafos livres de $K_{1,4}$ [Caro et al. 1996].

Nesse artigo, investigamos esse problema com relação à sua complexidade parametrizada e obtemos algoritmos FPT de tempos $O^*(2^{vc})$ e $O^*(1.4656^{vc^+})$ para decidir se um grafo é bem coberto, parametrizados por $vc(G)$ e $vc^+(G)$, respectivamente, melhorando resultados de Boria et al. em 2015 [Boria et al. 2015]. Também obtemos algoritmo FPT parametrizado por $\alpha(G) = n - vc(G)$ em grafos d-degenerados, que inclui grafos com genus limitado (como grafos planares) e grafos com grau máximo limitado.

Finalmente estudamos a boa cobertura de grafos com poucos P_4's. Em [Klein et al. 2013], a boa cobertura de muitas classes de grafos com poucos P_4's foi investigada, como os cografos, P_4-esparsos, P_4-lite e P_4-tidy. Nesse artigo, também obtemos algoritmo linear para grafos P_4-laden estendidos e grafos $(q, q-4)$, que são superclasses dessas classes (ver Figura 1). Esse algoritmo é FPT parametrizado por q.

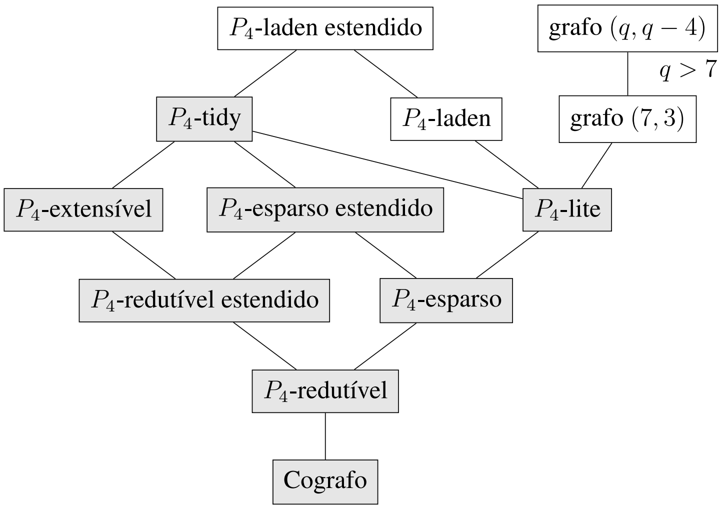

Figure 1. Hierarquia das classes investigadas. Em cinza, as classes investigadas em [Klein et al. 2013].

2. Boa cobertura de grafos com poucos P_4's

Cografo é um grafo sem P_4 induzido. Um grafo é *P_4-esparso* se todo grupo de 5 vértices induz no máximo um P_4. Dado $q \geq 4$, um grafo é $(q, q-4)$ se todo grupo de no máximo q vértices induz no máximo $q-4$ P_4's. Cografos e P_4-esparsos são exatamente os grafos $(4, 0)$ e $(5, 1)$. Em [Babel et al. 2001], foram obtidos algoritmos lineares para vários problemas de otimização em grafos $(q, q-4)$. Um grafo é P_4-laden estendido se todo subgrafo induzido de no máximo 6 vértices é livre de $\{2K_2, C_4\}$ ou contém dois P_4's induzidos [Giakoumakis 1996]. Uma motivação para obter algoritmos em P_4-laden estendidos e grafos $(q, q-4)$ é por eles estarem no topo de uma hierarquia bem conhecida de grafos com poucos P_4's, como P_4-lite, P_4-laden e P_4-tidy (Figura 1). Em [Klein et al. 2013], foram obtidos algoritmos lineares para reconhecer grafos P_4-tidy bem cobertos. Usando a decomposição primeval dos P_4-laden estendidos e dos grafos $(q, q-4)$, obtemos:

Teorema 1 *Seja G um grafo e $q \geq 4$. Se G é $(q, q-4)$ ou P_4-laden estendido, é possível decidir se G é bem coberto em tempo linear $O(2^q q^2 \cdot (m+n))$.*

3. FPT parametrizado por $vc(G)$ e $vc^+(G)$

Um problema de decisão em uma classe de grafos $\mathcal{C}$ é *tratável com parâmetro fixo* (FPT) em algum parâmetro $k = k(G)$ em tempo $O(n^c)$ (para uma constante c) se existe algoritmo em tempo $O(f(k) \cdot n^c)$ que o resolve para qualquer grafo G de $\mathcal{C}$, onde f é uma função que depende apenas de $k = k(G)$. Nesse caso, dizemos que o tempo é $O^*(f(k))$.

Em 2015, [Boria et al. 2015] obtiveram algoritmo FPT de tempo $O^*(1.5397^{vc^+})$ para computar $vc^+(G)$, que pode ser usado para decidir se um grafo é bem coberto. No teorema abaixo, nós estendemos esse resultado.

Teorema 2 *É possível decidir se um grafo é bem coberto em tempo $O^*(1.4656^{vc^+})$.*

Em 2015, [Boria et al. 2015] também obtiveram algoritmo FPT de tempo $O^*(2.8284^{vc})$ para computar $vc^+(G)$. No teorema abaixo, estendemos esse resultado para um algoritmo FPT de tempo melhor $O^*(2^{vc})$ que enumera todas as coberturas minimais de um grafo.

Teorema 3 *É possível enumerar todas as coberturas minimais de vértices de um grafo em tempo* $O^*(2^{vc})$.

Prova: [Esboço] Seja C uma cobertura mínima de vértices de G. Logo toda aresta tem uma extremidade em C. Então, para toda partição de C em dois conjuntos A e B ($A \cup B = C$, $A \cap B = \emptyset$), temos que $(A \cup N(B)) \setminus B$ é uma cobertura de G se não existe aresta com ambas as extremidades em B. Além disso, para toda cobertura minimal C' de G, $A = C \cap C'$ e $B = C \setminus C'$ formam uma partição de C tal que $C' = (A \cup N(B)) \setminus B$, pois $C' \setminus C \subseteq N(B)$ (visto que C' é uma cobertura e é minimal). Portanto, podemos enumerar todas as coberturas minimais de G verificando para cada partição (A, B) de C se $(A \cup N(B)) \setminus B$ é uma cobertura minimal de G. Note que é possível verificar se um conjunto é uma cobertura minimal em tempo $O(m + n)$. Como existem $2^{|C|}$ partições de C, $|C| = vc(G)$ e é possível obter uma cobertura mínima C em tempo $O(2^{vc} \cdot (m + n))$, o resultado segue. □

4. FPT parametrizado por $\alpha(G) = n - vc(G)$

A treewidth local [Eppstein 2000] de um grafo G é a função $ltw_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa à cada $r \in \mathbb{N}$ a treewidth máxima de uma r-vizinhança de G. Ou seja, $ltw_G(r) = \max_{v \in V(G)}\{tw(G[N_r(v)]\}$, onde $N_r(v)$ é o conjunto de vértices à distância no máximo r de v. Dizemos que uma classe $\mathcal{C}$ de grafos tem treewidth local limitada se existe uma função $f_{\mathcal{C}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $G \in \mathcal{C}$ e $r \in \mathbb{N}$, $ltw_G(r) \leq f_{\mathcal{C}}(r)$. Sabe-se que grafos com genus limitado e grafos com grau máximo limitado tem treewidth local limitada [Eppstein 2000]. Em particular, $ltw_G(r) \leq \Delta(G)^r$ e, se G é planar, $ltw_G(r) \leq 3r - 1$ [Bodlaender 1998]. Nós provamos o seguinte:

Teorema 4 *Decidir se um grafo é bem coberto é FPT parametrizado por* $\alpha(G) = n - vc(G)$ *em tempo* $O(n^2)$ *para grafos com treewidth local limitada.*

Prova: [Esboço] Seja $WellCov_k$ a seguinte fórmula lógica de 1^o-ordem que é verdadeira se e só se G não tem dois conjuntos independentes X e Y com $|X| = k$, $|Y| = k - 1$ e Y sendo maximal:

$$WellCov_k := \forall x_1, \dots, x_k \, \forall y_1, \dots, y_{k-1} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \right) \wedge \, Indep(\{x_1, \dots, x_k\})$$

$$\to \neg\Big(Indep(\{y_1, \dots, y_{k-1}\}) \wedge Maximal(\{y_1, \dots, y_{k-1}\}\Big),$$

onde $Indep(X) := \forall x, y (x \in X \wedge y \in X) \to \neg E(x, y)$ e $Maximal(X) := \forall y \exists x (y \notin X) \to (x \in X) \wedge E(x, y)$. Note que, se G não é bem coberto, então existem conjuntos independentes X e Y com $2 \leq |X| \leq \alpha$, $|Y| = |X| - 1$ e Y sendo maximal. Assim, seja $WellCov$ a fórmula lógica de 1^o-ordem que é verdadeira se e só se G é bem coberto:

$$WellCov := \bigwedge_{2 \leq k \leq \alpha} WellCov_k.$$

Como $WellCov$ contém no máximo α^2 variáveis, temos pelo Teorema de Frick-Grohe (veja [Flum and Grohe 2006]) que o problema de decidir a boa cobertura é FPT parametrizado por $\alpha(G)$ em tempo $O(n^2)$ para grafos com treewidth local limitada. $\square$

Podemos obter algoritmos FPT específicos (parametrizados por $\alpha(G)$) para grafos d-degenerados, como grafos planares ou grau máximo limitado. Um grafo é *d-degenerado* se todo subgrafo induzido tem um vértice com grau no máximo d. A *degenerância* de G é o menor d tal que G é d-degenerado. Por exemplo, grafos periplanares, grafos planares e grafos com grau máximo Δ tem degenerância no máximo 2, 5 e Δ, respectivamente.

Teorema 5 *O problema de decidir se um grafo é bem coberto é FPT parametrizado por $\alpha = \alpha(G) = n - vc(G)$ em tempo $O((d+1)^\alpha \cdot (m+n))$ para grafos d-degenerados, para todo $d > 0$. Além disso, o tempo é $O(7^\alpha \cdot (m+n))$, se G tem genus limitado.*

Prova: [Esboço] Seja G um grafo d-degenerado. O algoritmo usa uma árvore de busca com altura $\alpha(G)$ em que cada nó tem um grafo associado. A raiz da árvore representa o grafo G. Uma folha é um nó com altura $\alpha(G)$ ou com grafo associado vazio. Seja h um nó não-folha. Ramificamos h de acordo com um vértice v com grau mínimo no grafo associado de h. Seja $N[v] = \{u_1, \ldots, u_\ell\}$, onde $\ell = |N[v]| \leq d+1$. O nó h terá $\ell + 1$ filhos $h_1, h_2, \ldots, h_\ell$ na árvore. No nó filho h_i ($1 \leq i \leq \ell$), remova $N[u_i]$ do grafo associado, que também é d-degenerado. Se existem duas folhas com diferentes alturas, retorne NÃO (pois G tem conjunto independente maximal que não é máximo). Caso contrário, retorne SIM. Note que a altura da árvore é no máximo $\alpha(G)$ e cada nó tem no máximo $d+1$ filhos. Portanto, a árvore tem no máximo $(d+1)^\alpha$ nós e o tempo total é $O((d+1)^\alpha \cdot (m+n))$, pois cada nó leva tempo $O(m+n)$. $\square$

References

Babel, L., Kloks, T., Kratochvil, J., Kratsch, D., Muller, H., and Olariu, S. (2001). Efficient algorithms for graphs with few p4's. *Discrete Mathematics*, 235(1):29 – 51.

Bodlaender, H. L. (1998). A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theoretical Computer Science*, 209(1):1 – 45.

Boria, N., Croce, F. D., and Paschos, V. T. (2015). On the max min vertex cover problem. *Discrete Applied Mathematics*, 196:62 – 71.

Caro, Y., Sebő, A., and Tarsi, M. (1996). Recognizing greedy structures. *Journal of Algorithms*, 20(1):137 – 156.

Eppstein, D. (2000). Diameter and treewidth in minor-closed graph families. *Algorithmica*, 27:275–291.

Flum, J. and Grohe, M. (2006). *Parameterized Complexity Theory (Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series).* Springer-Verlag New York, Inc.

Giakoumakis, V. (1996). P4-laden graphs: A new class of brittle graphs. *Information Processing Letters*, 60(1):29 – 36.

Klein, S., de Mello, C. P., and Morgana, A. (2013). Recognizing well covered graphs of families with special p4-components. *Graphs and Combinatorics*, 29:553–567.

Plummer, M. D. (1970). Some covering concepts in graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 8(1):91 – 98.