Problema de partição em conjunto independente e árvore quando restrito à classe dos grafos-P_4-tidy

Fábio Silva[1], **Raquel Bravo**[1], **Rodolfo Oliveira**[2], **Uéverton Souza**[1]

[1]Instituto de Computação
Universidade Federal Fluminense (UFF)

[2]Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior
Universidade Federal Fluminense (UFF)

fabiojunior@id.uff.br, {raquel,ueverton}@ic.uff.br,

rodolfo.oliveira@infes.uff.br

Abstract. *We consider in this work the problem of partitioning the vertex set of a graph into an independent set (a graph without edges between its vertices) and into a tree (a connected graph that has no cycles) called* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-partition. We will present a characterization by minimal forbidden subgraphs of* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-partition of the* P_4*-tidy graphs. As an additional result, we have provided an algorithm of recognizing this partition in linear time for* P_4*-tidy graphs, using the proof of the characterization by forbidden subgraphs.*

Resumo. *Consideramos neste trabalho o problema de particionar o conjunto de vértices de um grafo em um conjunto independente (sem arestas entre os vértices) e em uma árvore (grafo livre de ciclos e conexo) denominada* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-partição. Apresentaremos uma caracterização por subgrafos proibidos minimais da* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$*-partição dos grafos restritos à classe dos grafos* P_4*-tidy. Como resultado adicional, disponibilizamos um algoritmo de reconhecimento desta partição em tempo linear para os grafos* P_4*-tidy, utilizando a prova de caracterização dos subgrafos proibidos.*

1. Introdução

Podemos descrever formalmente os problemas de partição de vértices como aqueles que tem por objetivo particionar conjunto de vértices de um grafo em subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$, onde $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq k$, exigindo-se algumas propriedades internas ou externas sobre este conjunto de vértices. Esta classe de problemas tem despertado amplo interesse devido às pesquisas em grafos perfeitos [Golumbic 2004]. Pode-se encontrar aplicação para problemas de partição em diversas áreas como a biologia, engenharias, informática e mais recentemente na ciência de dados. Estudar subconjuntos de usuários em redes sociais, design de chips VLSI, escalonamento de recursos são algumas aplicações práticas que podem ser abordadas através de problemas de partição.

Outro problema de grande importância para a teoria dos grafos fortemente relacionado aos problemas de partição é o problema da k-coloração [Saaty 1977], que tem por objetivo colorir o conjunto de vértices de um grafo com k cores distintas de modo que dois vértices adjacentes não recebam a mesma cor. Este problema pode ser abordado através do problema em partição de dividir o conjunto de vértices do grafo em k conjuntos independentes.

Chamamos a classe dos grafos que podem ser particionados em conjunto independente e uma árvore de grafos-$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. A classe dos grafos-$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ está estritamente contida em outra classe também conhecida como classe dos grafos *quase-bipartidos*. A classe dos grafos quase-bipartidos é definida como classe dos grafos que podem ser particionados em um conjunto independente e uma floresta. Foi introduzida por [Yang and Yuan 2006], onde os autores demonstraram que o problema da quase-bipartição é NP-completo para grafos gerais mesmo quando restrito a grafos de grau máximo 3 ou diâmetro 4, podendo ser resolvido em tempo polinomial para grafos de grau máximo 2 ou diâmetro 2, deixando a questão do diâmetro 3 em aberto. Recentemente, [Bonamy et al. 2018] provaram que a NP-completude se estende para grafos de diâmetro 3 também. Entretanto, o resultado não se aplica a todas as subclasses de grafos e isto tem despertado o interesse de diversos autores ([Dross et al. 2016], [Bonamy et al. 2017]) em pesquisar algoritmos eficientes para solucionar o problema da quase-bipartição quando restrito a certas subclasses de grafos.

[Brandstädt et al. 2013] provaram que este problema continua NP-completo para os grafos perfeitos, todavia, apresentaram um algoritmo polinomial para a classe dos co-grafos (contida estritamente nos grafos perfeitos) e iniciaram o estudo deste problema na classe dos grafos com poucos P_4's. Seguindo a mesma linha de investigação, estudamos o problema da $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição na classe dos grafos P_4-tidy, também pertencente à classe dos grafos com poucos P_4's, que será apresentada na próxima seção.

Apresentamos na Seção 3 uma caracterização para subgrafos desconexos $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-particionáveis e utilizamos este resultado para fornecer uma caracterização por subgrafos proibidos da partição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ em grafos P_4-tidy em geral, apresentada na Seção 4. Este resultado pode ser aplicado no desenvolvimento de um algoritmo linear para o reconhecimento desta classe de grafos como demonstrado ao final desta mesma seção.

2. Preliminares

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo tal que $V(G)$ denota seu conjunto de vértices e $E(G)$ seu conjunto de arestas. Dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos adjacentes se a aresta $(u, v) \in E(G)$. Denotamos como $N(X)$, para $X \subseteq V(G)$, a vizinhança do conjunto de vértices X, sendo $N(X)$ o conjunto dos vértices de $V(G)$ cujas arestas possuem apenas um dos extremos em X. Abreviamos $N(\{x\})$ como $N(x)$ por comodidade. Um subgrafo H de G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H de G é chamado de subgrafo induzido se, para qualquer par de vértices $u, v \in V(H)$, a aresta $(u, v) \in E(H)$ se, e somente se, $(u, v) \in E(G)$.

Um grafo G é dito da classe P_4-tidy se para qualquer P_4 (caminho formado por 4 vértices) induzido H de G, existe no máximo um vértice fora de H que juntamente com três vértices de H induzem no máximo um P_4. Esta classe foi apresentada por [Roussel et al. 1999] para generalizar a já conhecida classe dos grafos com poucos P_4's. Uma caracterização estrutural para os grafos P_4-tidy foi apresentada em [Giakoumakis et al. 1997].

Teorema 1. *[Giakoumakis et al. 1997] Um grafo G é P_4-tidy se e somente se para todo subgrafo induzido H de G, exatamente uma das seguintes condições é satisfeita: (a) H*

é desconexo; (b) $\overline{H}$ é desconexo; (c) H é uma aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-tidy; (d) H é uma quase-aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-tidy; (e) H é isomorfo a C_5 (ciclo induzido com 5 vértices), P_5 (caminho induzido com 5 vértices) ou $\overline{P_5}$ (complemento de um caminho induzido com 5 vértices); (f) H possui exatamente um vértice ou $V(G) = \emptyset$. $\square$

As demais definições necessárias para este trabalho podem ser encontradas em [Giakoumakis et al. 1997]. Por questão de espaço as provas das seções seguintes foram omitidas.

3. Caracterização da $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição em grafos desconexos

Mostraremos agora uma caracterização para a $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição nos grafos desconexos. Seja G um grafo desconexo.

Lema 1. *G possui uma partição-$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ se e somente se existe um componente conexo $G_i \subseteq G$ tal que G_i possui uma partição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ e $G \backslash G_i$ é conjunto independente.* $\square$

Corolário 1. *Se G possui uma partição-$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, então existe no máximo um componente conexo não trivial (com aresta) em G.* $\square$

Lema 2. *Seja G' um subgrafo induzido de G, isomorfo a $2K_2$. Se G é $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-particionável, então todos os vértices de G' pertencem ao mesmo componente conexo de G.* $\square$

Pelos resultados do Corolário 1 e Lema 2 garantimos que se G é $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-particionável, então G possui no máximo um componente conexo contendo aresta, sendo assim livre de qualquer $2K_2$ induzido por dois componentes conexos distintos. Assim podemos afirmar que uma vez verificada a existência de apenas um componente conexo não trivial, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2. *Seja G um grafo com exatamente um componente conexo não trivial G'. G possui uma $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição se, e somente se, G' possui uma $(\mathcal{S}', \mathcal{T}')$-partição.* $\square$

Concluímos então que é possível identificar a $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição de um grafo G desconexo pela caracterização de uma partição $(\mathcal{S}', \mathcal{T}')$ do seu único componente conexo não trivial G', caso exista. Assim, garantir que o componente conexo não trivial único G' de G seja $(\mathcal{S}', \mathcal{T}')$-particionável é uma condição necessária e suficiente para garantir a $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição de qualquer grafo G.

4. Caracterização da $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição em grafos P_4-tidy

Utilizando os resultados da seção anterior, ofereceremos uma caracterização para os grafos P_4-tidy-$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ através de uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos P_4-tidy conexos.

Teorema 3. *Seja G um grafo P_4-tidy. G possui uma $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-partição se, e somente se, existe no máximo um componente conexo não trivial G' em G, e G' é livre dos grafos da Figura 1 como subgrafos induzidos.* $\square$

Concluímos então a análise do problema do reconhecimento da partição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ em grafos P_4-tidy apresentando um algoritmo que reconhece esta partição em tempo linear.

Teorema 4. *Podemos construir um algoritmo linear para o reconhecimento de grafos P_4-tidy $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-particionáveis.* $\square$

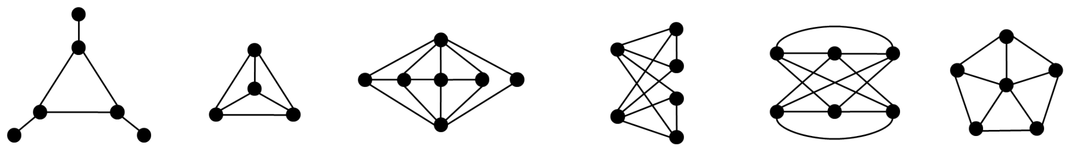

Figura 1. Subgrafos proibidos para grafo P_4-tidy-$(\mathcal{S},\mathcal{T})$

5. Conclusão

Como principal resultado trouxemos uma caracterização da $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-partição nos grafos desconexos, reduzindo o problema a encontrar um partição $(\mathcal{S}',\mathcal{T}')$ em um subgrafo não trivial e conexo único, caso exista. Estendemos o resultado anterior para caracterizar os grafos P_4-tidy através de uma família de subgrafos proibidos minimais, utilizando as características da decomposição modular da classe P_4-tidy. Este resultado incrementa o estado da arte no estudo do problema da $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-partição em grafos com poucos P_4's, mostrando que a classe dos grafos P_4-tidy, assim como as demais classes que estão contidas propriamente nesta, podem ser reconhecidas em tempo linear. Em trabalhos futuros pretendemos estender estes resultados para a classe dos grafos P_4-laden e P_4-laden estendido, completando assim a análise do problema para a classe dos grafos com poucos P_4's.

Referências

Bonamy, M., Dabrowski, K. K., Feghali, C., Johnson, M., and Paulusma, D. (2017). Independent feedback vertex set for p_5-free graphs. *arXiv preprint arXiv:1707.09402*.

Bonamy, M., Dabrowski, K. K., Feghali, C., Johnson, M., and Paulusma, D. (2018). Independent feedback vertex sets for graphs of bounded diameter. *Information Processing Letters*, 131:26–32.

Brandstädt, A., Brito, S., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F. (2013). Cycle transversals in perfect graphs and cographs. *Theoretical Computer Science*, 469:15–23.

Dross, F., Montassier, M., and Pinlou, A. (2016). Partitioning sparse graphs into an independent set and a forest of bounded degree. *arXiv preprint arXiv:1606.04394*.

Giakoumakis, V., Roussel, F., and Thuillier, H. (1997). On p4-tidy graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 1.

Golumbic, M. C. (2004). *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, volume 57. Elsevier.

Roussel, F., Rusu, I., and Thuillier, H. (1999). On graphs with limited number of p4-partners. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 10(01):103–121.

Saaty, T. (1977). *The four-color problem : assaults and conquest*. McGraw-Hill International Book Co, New York.

Yang, A. and Yuan, J. (2006). Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set. *Discrete mathematics*, 306(12):1207–1216.