A b-continuidade de grafos com cintura alta*

Allen Ibiapina , Ana Silva

[1]Departamento de Matemática – Universidade Federal do Ceará (UFC)
Fortaleza – CE – Brazil
ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

allenr.roossim@gmail.com, anasilva@mat.ufc.br

Abstract. *A b-coloring of a graph is a proper coloring such that each color class has at least one vertex which is adjacent to each other color class. The b-spectrum of G is the set $S_b(G)$ of integers k such G has a b-coloring with k colors and $b(G) = \max S_b(G)$ is the b-chromatic number of G. A graph is b-continous if $S_b(G) = [\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$. An infinite number of graphs that are not b-continuous is known. Also it is known that graphs with girth at least 10 are b-continuous. In this article, we prove that graphs with girth at least 8 are b-continuous and that the b-spectrum of graphs with girth at least 7 contains the integers between $2\chi(G)$ and $b(G)$.*

Resumo. *Uma b-coloração de um grafo é uma coloração própria, tal que cada classe de cor possui um vértice que é vizinho de pelo menos um vértice das outras classes de cores. O b-espectro de G é o conjunto $S_b(G)$ dos inteiros k tais que G tem uma b-coloraçao com k cores e $b(G) = \max S_b(G)$ é o número b-cromático de G. Um grafo é b-contínuo se $S_b(G) = [\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$. É conhecida uma infinidade de grafos que não são b-contínuos. Também é sabido que grafos com cintura maior ou igual a 10 são b-contínuos. Neste artigo, mostramos que grafos com cintura pelo menos 8 são b-contínuos e que o b-espectro de grafos com cintura pelo menos 7 contém os inteiros entre $2\chi(G)$ e $b(G)$.*

Introdução

Seja G um grafo simples[1]. Uma *k-coloração própria* de G, doravante chamada apenas de k-coloração, é uma função $\psi\colon V(G) \to \mathbb{N}$ tal que $|\psi(V(G))| = k$ e $\psi(u) \neq \psi(v)$ sempre que $uv \in E(G)$. Dizemos que $u \in V(G)$ é um *b-vértice em ψ (de cor $\psi(u)$)* se para toda cor $c \in \psi(V(G)) \setminus \{\psi(u)\}$, existe v vizinho de u tal que $\psi(v) = c$. Se para uma classe de cor $c \in \psi(V(G))$, não existem b-vértices da cor c, podemos obter uma $(k-1)$-coloração recolorindo cada vértice da cor c com uma cor de $\psi(V(G)) \setminus \{c\}$ que não aparece em sua vizinhança; dizemos que essa nova coloração é obtida de ψ pela *limpeza da cor c*. Para uma coloração que não podemos aplicar esse algorítmo para diminuir a quantidade de cores, toda classe de cor c possui um b-vértice. Uma coloração assim é chamada de *b-coloração*. Como o problema de coloração é NP-completo, nem sempre uma b-coloração usa apenas $\chi(G)$ cores. Note que toda coloração de G usando $\chi(G)$ cores é uma b-coloração, caso contrário poderíamos diminuir o número de cores usadas. Por isso, a

*Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Projeto CNPq/Universal 401519/2016-3
[1]Aqui usamos a terminologia de [Bondy and Murty 2008].

menor quantidade de cores em uma b-coloração coincide com o número cromático, e portanto só trabalhamos com o parâmetro de maximização. Em [Irving and Manlove 1999] é definido o *número b-cromático de G*, que é denotado por *b(G)*, como o maior natural k tal que G tem uma b-coloração que usa k cores. No mesmo artigo os autores mostraram que o problema de achar $b(G)$ é NP-completo.

Considerando uma b-coloração com $b(G)$ cores, cada b-vértice claramente tem grau maior ou igual $b(G) - 1$. Assim, definindo $m(G)$ como o maior inteiro k tal que G possui k vértices de grau maior ou igual $k-1$, segue que $m(G) \geq b(G)$. Note que pode-se calcular $m(G)$ em tempo polinomial. Irving e Manlove provaram que calcular o número b-cromático de árvores é polinomial. Eles demonstraram primeiro que $b(G) \geq m(G) - 1$ e depois que pode-se decidir se $b(G) = m(G)$ em tempo polinomial. Estes resultados foram generalizados em [Campos et al. 2015] para grafos de cintura pelo menos 7. Tais estudos sugerem que grafos de cintura alta são mais fáceis de lidar no que diz respeito à b-coloração.

Irving and Manlove observaram que o cubo tem b-coloração com 2 cores e com 4 cores, mas não possui b-coloração com 3 cores. Inspirado nisso, em [Kratochvíl et al. 2002] é mostrado que, para $n \geq 1$ inteiro, o grafo obtido de $K_{n,n}$ pela deleção de arestas de um emparelhamento perfeito possui b-colorações usando 2 e n cores, mas não com uma quantidade de cores estritamente entre esses dois números. Daí surge a definição do *b-espectro de G*, que é o conjunto dos inteiros k tais que G tem uma b-coloração com k cores; tal conjunto é denotado por $S_b(G)$. Naturalmente surge também a definição de b-continuidade: dizemos que um grafo é *b-contínuo* se $S_b(G) = [\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z}$. Em [Barth et al. 2007] é provado que para todo subconjunto finito $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existe G tal que $S_b(G) = S$, e também que o problema de decidir se um dado grafo G é b-contínuo é NP-completo ainda que sejam dadas b-colorações com $\chi(G)$ e $b(G)$ cores. Existem muitos resultados positivos no que diz respeito à b-continuidade de grafos de alguma família. É demonstrado que grafos regulares com cintura maior ou igual a 6, sem ciclos de tamanho 7 são b-contínuos em [Balakarishnan and Kavaskar 2012], e, mais recentemente, que grafos de cintura pelo menos 10 são b-contínuos [Sales and Silva 2017]. Lá, os autores, propõem a seguinte questão: Qual é o menor inteiro $\hat{g}$ tal que G é b-contínuo sempre que tem cintura pelo menos $\hat{g}$. Usando o resultado lá demonstrado, tem-se $\hat{g} \leq 10$. Por outro lado, como $K_{n,n}$ menos um emparelhamento perfeito não é b-contínuo temos que $5 \leq \hat{g}$. Até onde sabemos, nenhum grafo de cintura pelo menos 5 que não é b-continuo é conhecido. O principal resultado desse artigo que melhora o resultado provado em [Sales and Silva 2017] é.

Teorema 1. *Se G é um grafo de cintura pelo menos 8, então G é b-contínuo.*

E, ainda na direção de mostrar que b-colorações de grafos com cintura alta são fáceis, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 2. *Se G é um grafo de cintura pelo menos 7, então* $[2\chi(G), b(G)] \cap \mathbb{Z} \subseteq S_b(G)$

De maneira geral, a prova consiste em, dada uma b-coloração com k cores, obter uma b-coloração com $k - 1$ cores usando recolorações. Mencionamos que as provas possuem um passo não construtivo, o que é de esperar já que calcular o número cromático de grafos com cintura ao menos k é NP-completo, para todo $k \geq 3$ fixo [Lozin and Kaminski 2007].

As seguintes definições serão essenciais para a prova. A *cintura* de um grafo é o tamanho do seu menor ciclo. Para z inteiro, e $u \in V(G)$, $N_{\leq z}(u)$ denota o conjunto de vértices à distância no máximo z de u. Em [Sales and Silva 2017], um vértice $u \in V(G)$ é definido para ser uma *k-íris* se existe $S \subseteq N(u)$ tal que $|S| \geq k-1$ e $d(v) \geq k-1$ para todo $v \in S$. Dada ψ uma k-coloração de G, cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ é chamado de *cor*, enquanto que $\psi^{-1}(i)$ é chamado de *classe de cor*. Dizemos que um vértice u *realiza* a cor i, se $u \in \psi^{-1}(i)$ e u é b-vértice; dizemos também que i é *realizada por* u. Para $x \in V(G)$ e $i \in \{1, \ldots, k\}$, $N^i(x) = \{v \in N(x) \mid \psi(v) = i\}$, ou seja, os vizinhos de x que tem cor i. Para $X \subseteq V(G)$, $N^i(X) = \cup_{x \in X} N^i(x) \setminus X$. Denotamos por $B(\psi)$ o conjunto de b-vértices de ψ e, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, B_i é o conjunto de b-vértices da cor i, isto é, $B_i = B(\psi) \cap \psi^{-1}(i)$. Para cada $x \in V(G) \setminus B(\psi)$, seja $U(x) = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid N^{\psi(x)}(B_i) = \{x\}\}$, ou seja, o conjunto de cores que dependem de x para possuirem b-vértices. Para finalizar, para uma cor $j \in \{1, \ldots, k\}$, dizemos que $x \in V(G)$ é *j-mutável* se existe cor c tal que, ao mudarmos a cor de x para c, não criamos b-vértices da cor j; caso contrário x é dito *j-imutável*. Em [Balakarishnan and Kavaskar 2012], é provado o seguinte lema:

Lema 1. *Seja G um grafo de cintura pelo menos 6 e sem ciclos de tamanho 7. Se G tem uma k-íris com $k \geq \chi(G)$, então G tem uma b-coloração com k cores.*

Dado $x \in V(G) \setminus B(\psi)$, quando $U(x) = \emptyset$, podemos mudar a cor de x para uma cor livre sem perder a b-coloração com k cores. Em nossa prova, nos preocupamos especialmente com vértices $x \in V(G) \setminus B(\psi)$ tais que $|U(x)| \geq 2$; a esses chamamos de *úteis*. Para um conjunto $K \subseteq V(G) \setminus B(\psi)$ monocromático de cor i, diremos que uma cor j é *dependente* de K se $N^i(B_j) \subseteq K$. Note que, ao mudarmos as cores de K para quaisquer cores diferente da inicial, perderemos b-vértices de todas as cores dependentes de K e somente destas. Note que se j depende de K, então $B_j \subseteq N^j(K)$.

O teorema principal do artigo e de onde os Teoremas 1 e 2 são corolários é o seguinte.

Teorema 3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com cintura maior ou igual a 7. Se G possui uma b-coloração com k cores, onde $k \geq \chi(G) + 1$, então G possui uma b-coloração com $k-1$ cores ou uma $(k-1)$-íris.*

Acreditamos que as técnicas de recoloração alcançam seu limite quando a cintura chega em 7, tanto que o resultado que calcula o número cromático de grafos com cintura 7 apresentado em [Campos et al. 2015] até hoje ainda não foi melhorado. Desta maneira, uma tentativa de encontrar grafos com cintura 6 que não sejam b-contínuos é válida, mesmo se restringimos para grafos bipartidos. Em particular, uma resposta positiva para ambas as perguntas abaixo definiria o valor de $\hat{g}$ em 7.

Pergunta 1. *O Lema 1 pode ser generalizado de maneira a permitir ciclos de tamanho 7?*

Pergunta 2. *Existe grafo bipartido com cintura 6 que não seja b-contínuo?*

Idéia da Prova

Nossa prova segue semelhante à feita em [Sales and Silva 2017], porém damos atenção a uma cor que queremos retirar. Isso faz com que os b-vértices das outras cores se aproximem dos b-vértices dessa cor específica. Seja ψ uma coloração com k cores de G. Suponha que ψ minimiza em primeiro lugar a quantidade de b-vértices da cor 1 e, em segundo lugar, que minimiza a quantidade de vértices da cor 1. Seja $u \in B_1$. Tentamos recolorir $N(u)$ de forma que u deixe de ser b-vértice, tomando cuidado de não criar mais b-vértices da cor 1 e de que todas as outras cores ainda sejam realizadas. Daí, pela minimalidade de $|B_1|$, essa nova coloração não é b-coloração e, como todas as cores que não 1 são realizadas, a cor 1 é a única não realizada. Pela limpeza de 1, conseguimos uma b-coloração com $k-1$ cores. Argumentamos também que, quando não conseguimos isso, tem-se que u é k-íris e, em particular, $(k-1)$-íris; daí a b-coloração desejada é obtida pelo Lema 1. Um fato importante e que já nos direciona para um entendimento do que está acima, é o seguinte.

Fato 1. *Para cada cor $j \in \{2, \ldots, k\}$, tem-se que todo $x \in N^j(u) \setminus B(\psi)$ é 1-mutável. Além disso, vale um dos seguintes itens:*

1. *Existe $v \in N(u) \cap B_j$;*
2. *Existe cor $d \in \{2, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ tal que d depende de $N^j(u)$.*

Após a prova do fato, argumentamos que se a quantidade de cores que segue o item 2 é não nula, passando por algumas colorações parciais conseguimos uma b-coloração com $k-1$ cores. Sobrando então o caso onde o item 1 vale para todas as cores. É trivial ver que temos uma $(k-1)$-íris.

Referências

Balakarishnan, R. and Kavaskar, T. (2012). b-coloring of kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160:9–14.

Barth, D., Cohen, J., and Faik, T. (2007). On the b-continuity property of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155:1761–1768.

Bondy, J. and Murty, U. (2008). *Graph Theory*. Springer.

Campos, V., Lima, C., and Silva, A. (2015). Graphs of girth at least 7 have high b-chromatic number. *European Journal of Combinatorics*, 48:154–164.

Irving, R. W. and Manlove, D. (1999). The b-chromatic number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 91:127–141.

Kratochvíl, J., Tuza, Z., and Voigt, M. (2002). On the b-chromatic number of graphs. In Goos, G., Hartmanis, J., van Leeuwen, J., and Kučera, L., editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 310–320. Springer Berlin Heidelberg.

Lozin, V. and Kaminski, M. (2007). Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles. *Contributions do Discrete Mathematics*, 2.

Sales, C. L. and Silva, A. (2017). The b-continuity of graphs with large girth. *Graphs and Combinatorics*, 33:1138–1146.