

Sobre a Dificuldade de Reconhecimento de Grafos B_1 -EPG-Helly

Claudson Bornstein¹, Tanilson Santos^{1,2}, Uéverton Souza³, Jayme Szwarcfiter^{1,4}

¹Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – UFRJ (Coppe/PESC)
Caixa Postal 68511 – 21941-972 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

²Curso de Ciência da Computação – Universidade Federal do Tocantins - UFT
Palmas-TO, Brasil

³Instituto de Computação – Universidade Federal do Fluminense - UFF
Niterói, Brasil

⁴Departamento de Informática e Ciência da Computação - IME
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

{cbornstein, uevertonssouza}@gmail.com, {jayme, tanilson}@cos.ufrj.br

Abstract. *Golumbic, Lipshteyn e Stern have defined in 2009 the EPG graphs, a intersection graph class based on edge intersection of paths on a grid. An EPG graph G is a graph that admits a representation scheme where its vertices are represented by paths on a grid Q , such that two vertices of G are adjacent if and only if their corresponding paths in Q have a common edge. If the paths in Q have at most k changes of direction (bends), we say that this is a B_k -EPG representation. A collection C of sets satisfies the Helly property when every sub-collection of C that is pairwise intersecting has at least one common element. In this paper we show that the problem of recognizing B_1 -EPG graphs that satisfy the Helly property is NP-hard.*

Resumo. *Golumbic, Lipshteyn e Stern definiram em 2009 os grafos EPG, uma classe de grafos de intersecção baseada na intersecção de arestas de caminhos em uma grade. Um grafo EPG G é um grafo que admite um esquema de representação onde seus vértices são representados por caminhos de uma grade Q , de forma que dois vértices em G são adjacentes se e somente se os caminhos correspondentes em Q compartilham arestas. Se tais caminhos em Q tem no máximo k mudanças de direção (dobras), então a representação é dita B_k -EPG. Uma coleção C de conjuntos satisfaz a propriedade Helly quando toda subcoleção de C que é mutuamente intersectante possui pelo menos um elemento comum. Neste trabalho mostramos que o reconhecimento de grafos que admitem representação B_1 -EPG satisfazendo a propriedade Helly é NP-difícil.*

1. Introdução

Um grafo EPG G é um grafo que admite um esquema de representação onde seus vértices são representados por caminhos de uma grade Q , de tal forma que dois vértices em G são adjacentes se e somente se os caminhos correspondentes em Q possuem arestas em comum. O estudo de grafos EPG tem motivação prática relacionada ao problema de *layout* de

circuitos digitais, que podem ser representados como caminhos em uma grade ortogonal retangular.

Todo grafo G possui uma representação EPG, onde cada vértice v é representado como um caminho $p(v)$ e dois vértices u, v são adjacentes se e somente se $p(u) \cap p(v) \neq \emptyset$, ver [Golumbic et al. 2009]. Um grafo possui uma representação B_k -EPG se existe uma representação para o grafo na qual cada caminho tem no máximo k dobras.

A classe de grafos EPG tem sido estudada por diversos pesquisadores, atualmente, como [Ries 2009, Alcón et al. 2016, Cohen et al. 2014], entre outros. Essas pesquisas abordam com frequência caracterizações com relação a quantidade de dobras na representação dos grafos. Com relação à complexidade de reconhecimento, somente 3 classes de grafos EPG estão determinadas: B_0 -EPG [Golumbic et al. 2009], B_1 -EPG [Heldt et al. 2014] e mais recentemente B_2 -EPG [Martin Pergel 2017], sendo somente B_0 -EPG reconhecido em tempo polinomial, pois corresponde à classe de grafos de intervalo, ver [Booth and Lueker 1976]. A título de exemplo, a Figura 1(a) esboça o grafo C_3 , na Figura 1(b) é exibida uma representação EPG onde os caminhos não possuem dobra, na Figura 1(c) uma representação com 1 dobra e na Figura 1(d) uma representação onde todo caminho possui no máximo 2 dobras.

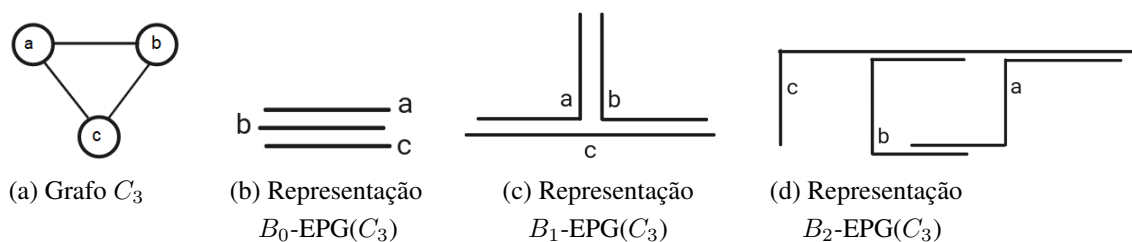


Figura 1. Grafo C_3 e algumas de suas representações sem dobra, com 1 dobra e com 2 dobras

Uma coleção C de conjuntos satisfaz a *propriedade Helly* quando toda subcoleção de C que é mutuamente intersectante possui pelo menos um elemento comum. A *propriedade Helly* tem esse nome em homenagem ao grande matemático austríaco Eduard Helly, que em 1923 propôs seu famoso teorema a respeito do relacionamento de conjuntos intersectantes.

Este trabalho trata de um estudo sobre grafos de intersecção de arestas em grade que possuem a propriedade Helly em sua representação. Nossa contribuição é apresentar uma prova da NP-dificuldade relacionada ao reconhecimento de grafos B_1 -EPG-Helly.

2. As classes B_1 -EPG e B_1 -EPG-Helly

Embora as classes B_1 -EPG e B_1 -EPG-Helly não coincidam, o mesmo não ocorre entre as classes B_0 -EPG e B_0 -EPG-Helly que coincidem, como observado no Lema 1.

Lema 1. *Toda representação B_0 -EPG satisfaz a propriedade Helly.*

Corolário 2. *A classe de grafos B_0 -EPG coincide com a classe B_0 -EPG-Helly.*

Definição 3. [Golumbic et al. 2009] *Dada uma coleção de caminhos $P = \{p_1, \dots, p_4\}$ de uma grade Q em uma representação B_1 -EPG do grafo G , considere um sub-grafo 4-estrela de Q cujo centro está posicionado sobre o ponto b e as arestas $(a_1, b), (a_2, b), (a_3, b), (a_4, b)$, tomadas em sentido horário. Defina-se:*

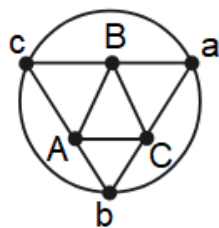
- Uma torta verdadeira é uma 4-estrela onde cada segmento $(a_i, b) \cup (a_{i+1}, b)$, para $1 \leq i \leq 4$, é um membro diferente de P , onde adicionalmente é assumido ser módulo 4. Todos os 4 caminhos de G fazem dobra em b .
- Uma torta falsa é uma 4-estrela onde cada segmento $(a_1, b) \cup (a_2, b)$; $(a_2, b) \cup (a_4, b)$; $(a_4, b) \cup (a_3, b)$; $(a_3, b) \cup (a_1, b)$, para $1 \leq i \leq 4$, é um membro diferente de P . Na torta falsa, somente 2 caminhos, não adjacentes entre si, fazem dobra em b .
- Considerando um retângulo de qualquer tamanho com 4 cantos (x_1, y_1) ; (x_2, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_1, y_2) . Um quadro ou moldura é um retângulo em que em cada canto está uma dobra diferente para cada membro de $p_1, \dots, p_4 \in P$. Os subcaminhos $p_1 \cap p_2, p_2 \cap p_3, p_3 \cap p_4, p_4 \cap p_1$, compartilham pelo menos uma aresta. Enquanto os subcaminhos $p_2 \cap p_4$ e $p_1 \cap p_3$ não compartilham aresta.



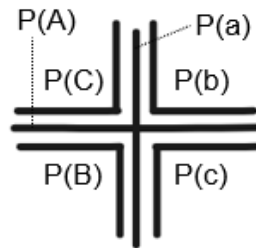
Figura 2. Representação B_1 -EPG de ciclo de tamanho 4: moldura (à esquerda), torta verdadeira (centro) e torta falsa (direita), [Golumbic et al. 2009].

Lema 4. [Golumbic et al. 2009] Dada uma coleção de caminhos $P = \{p_1, \dots, p_4\}$ de uma grade Q em uma representação B_1 -EPG do grafo G . Todo C_4 induzido em G corresponde, em qualquer representação, a uma torta verdadeira, a uma torta falsa ou a uma moldura.

Lema 5. O grafo octaedro O_3 possui representação B_1 -EPG(O_3) minimal, a menos de isomorfismos.



(a) Grafo octaedro O_3



(b) Representação B_1 -EPG(O_3)

Figura 3. Grafo octaedro O_3 e sua representação B_1 -EPG, [Heldt et al. 2014]

Pelo Lema 5 o grafo octaedro O_3 , da Figura 3(a), é isomorfo, em qualquer representação B_1 -EPG minimal, à representação da Figura 3(b). Pela Figura 3(b) podemos observar que, por exemplo, os caminhos $p(a)$, $p(b)$ e $p(c)$ formam uma estrutura que não satisfaz a propriedade Helly. Por essa observação e da informação mostrada no Lema 5 segue o seguinte Corolário 6.

Corolário 6. A classe B_1 -EPG-Helly é subclasse própria de B_1 -EPG.

3. O Reconhecimento de B_1 -EPG-Helly é NP-difícil

A prova de NP-dificuldade de reconhecimento de B_1 -EPG-Helly envolve uma redução ao problema de (1em3)-3SAT POSITIVO, similar à utilizada por [Heldt et al. 2014] para B_1 -EPG. O problema relacionado é o seguinte:

RECONHECIMENTO DE GRAFOS B_1 -EPG-HELLY

Instância: Um grafo G .

Objetivo: Determinar se existe um conjunto de caminhos de dobra simples $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ em uma grade Q representando $V(G)$ tal que:

- $u, v \in V(G)$ são adjacentes em G se e somente se p_u, p_v são intersectantes em Q ;
- P satisfaz a propriedade de Helly.

A redução codifica uma fórmula F pertencente a (1em3)-3SAT POSITIVO em um grafo dispositivo específico G_F . O dispositivo G_F força que a construção de uma representação B_1 -EPG-Helly que só existirá caso F seja satisfatível. G_F é subdividido em 3 partes: um dispositivo cláusula, para cada cláusula de F ; um dispositivo variável, para cada variável em F ; e um dispositivo base para construção da representação.

Uma fórmula F pertencente a (1em3)-3SAT POSITIVO é satisfatível se e somente se existir uma H - B_1 -EPG(G_F), onde G_F é um dispositivo construído apropriadamente a partir de F .

Referências

- Alcón, L., Bonomo, F., Durán, G., Gutierrez, M., Mazzoleni, M. P., Ries, B., and Valencia-Pabon, M. (2016). On the bend number of circular-arc graphs as edge intersection graphs of paths on a grid. *Discrete Applied Mathematics*, 234:12–21.
- Booth, K. and Lueker, G. (1976). Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using pq-tree algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 13:335–379.
- Cohen, E., Golombic, M. C., and Ries, B. (2014). Characterizations of cographs as intersection graphs of paths on a grid. *Discrete Applied Mathematics*, 178:46–57.
- Golombic, M., Lipshteyn, M., and Stern, M. (2009). Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks*, 54:130–138.
- Heldt, D., Knauer, K., and Ueckerdt, T. (2014). Edge-intersection graphs of grid paths: the bend-number. *Discrete Appl. Math*, 167:144–162.
- Martin Pergel, P. R. (2017). On edge intersection graphs of paths with 2 bends. *Discrete Applied Mathematics*, 226:106–116.
- Ries, B. (2009). Some properties of edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:29–33.