Jogos de Transporte Sequenciais*

Francisco J. M. Silva[1], **Flávio K. Miyazawa**[1], **Rafael C. S. Schouery**[1]

[1]Instituto de Computação - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 - 13083-852 - Campinas - SP - Brasil

francisco.silva@students.ic.unicamp.br, {fkm,rafael}@ic.unicamp.br

Abstract. *In this paper we analyze a transportation game where all players want to be transported to a common destination as quickly as possible, and in order to achieve this goal, they have to choose one of the available buses. We provide bounds for the Sequential Price of Anarchy considering two social functions in both metric and non-metric instances.*

Resumo. *Neste artigo, consideramos um jogo de transporte onde todos os jogadores querem ser transportados a um destino em comum o mais rápido possível, e para isso eles devem escolher um dentre os ônibus disponíveis. Apresentamos limitantes para o Preço da Anarquia Sequencial considerando duas funções sociais, para ambas instâncias métricas e não-métricas.*

Introdução

Problemas relacionados com meios de transporte são comumente encontrados na área de Otimização Combinatória, como, por exemplo, o problema do caixeiro viajante e o de roteamento de veículos. Recentemente, [Fotakis et al. 2017] propuseram e analisaram um problema de transporte sob a perspectiva da teoria de jogos algorítmica no qual exibem resultados quanto à existência e à ineficiência de equilíbrios puros de Nash. A seguir, apresentamos o jogo proposto por eles, o qual também será objeto dos nossos resultados.

Um jogo de transporte Γ é uma tupla (N, M, G), onde N é um conjunto de n jogadores; M é um conjunto de $m \geq 2$ ônibus; $G = (V, E)$ é um grafo completo não-direcionado com um vértice de partida s e um vértice de destino t onde cada aresta $e \in E$ possui uma distância $d_e \in \mathbb{R}_+$, e $V = N \cup \{s, t\}$. Se todas as distâncias d_e obedecerem a desigualdade triangular, dizemos que G é métrico. Cada jogador está localizado em um vértice de G e eles possuem o objetivo de serem transportados de suas localizações ao vértice t com o menor custo possível. Todos os ônibus estão inicialmente em s e devem seguir um caminho até o vértice t e consideramos que, assim como [Fotakis et al. 2017], o percurso de cada ônibus $j \in M$, é determinado por uma permutação $\pi_j : \{1, \ldots, n\} \to N$.

Um perfil de estratégia em Γ é uma atribuição $\sigma : N \to M$ na qual um jogador i escolhe um ônibus j que irá buscá-lo, e chamamos de $\mathcal{S}$ o conjunto de todos estes perfis. Considerando um perfil de estratégia $\sigma \in \mathcal{S}$, o custo do jogador sob este perfil $c_i(\sigma)$ é definido com a distância percorrida por σ_i, o ônibus escolhido por i no perfil σ, entre a localização de i e o destino t. Observe que as permutações π são independentes de

*Pesquisa financiada pela FAPESP Proc. 2015/11937-9, 2016/01860-1, 2016/23552-7, 2017/05223-9, CNPQ Proc. 311499/2014-7, 425340/2016-3, 148027/2016-4, 308689/2017-8.

qualquer perfil $\sigma \in \mathcal{S}$. Também consideramos que um ônibus j visita apenas os jogadores que o escolheram para realizar o trajeto, ou seja, j realizará $shortcuts$ (atalhos) em seu trajeto sempre que possível.

Um **Equilíbrio (Puro) de Nash** (PNE) em Γ é um perfil de estratégia σ onde nenhum jogador pode de forma unilateral reduzir seu custo escolhendo um ônibus diferente. Uma forma de avaliar a ineficiência de equilíbrios é o Preço da Anarquia. Considere uma função f representando a função social de um jogo $\mathcal{G}$, e seja $\mathrm{PNE}(\mathcal{G})$ o conjunto de todos os PNEs de $\mathcal{G}$. O **Preço da Anarquia** (PoA) é definido como $\mathrm{PoA}(f, \mathcal{G}) = \frac{\max_{\sigma \in PNE(\mathcal{G})} f(\sigma)}{\min_{\sigma^* \in \mathcal{S}} f(\sigma^*)}$, onde σ^* representa um perfil ótimo.

A seguir, apresentamos as duas funções sociais definidas por [Fotakis et al. 2017]. A primeira é relacionada com a distância total percorrida pelos ônibus, o que reflete o impacto ambiental do resultado do jogo. Considere um perfil de estratégia σ e para $j \in M$, seja $n_j = |\{i : \sigma_i = j\}|$ o número de jogadores que escolheram o ônibus j em σ e $(j_1, \ldots, j_{n_j})$ a ordenação em que os jogadores serão buscados pelo ônibus j. Então, $D(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} d(j_i, j_{i+1})$, onde $j_{n_j+1} = t$ para todo ônibus j. A segunda função social é chamada de custo igualitário $E(\sigma)$ e representa a maior distância percorrida por um único ônibus, definida como $E(\sigma) = \max_{i \in N} c_i(\sigma)$. Note que as funções não consideram a distância percorrida entre s e o primeiro passageiro.

Jogos de Transporte Sequenciais

Motivado pelo arcabouço dado por [Leme et al. 2012], nós analisamos o jogo de transporte em sua versão sequencial. Neste cenário os jogadores tomam suas decisões sequencialmente, por exemplo, do jogador 1 ao n, e essa decisão é final. Portanto, quando estiver decidindo em que ônibus viajar, um jogador i terá conhecimento somente das decisões de seus predecessores. Para isso, consideramos o jogo em sua forma extensiva onde a estrutura do jogo é representada por uma árvore m-ária T, onde em cada nível i ($1 \leq i \leq n$) o jogador i é responsável por tomar as decisões de todos os nós pertencentes ao seu nível, ou seja, escolher um dos m ônibus tendo como informação somente todas as escolhas possíveis dos seus $i-1$ predecessores. Nas folhas estão as informações dos custos de cada jogador.

Um subjogo é um jogo induzido pela restrição de T a um nó i e a seus descendentes, e um perfil de estratégia $s = (s_1, \ldots, s_n)$ é um **Equilíbrio Perfeito de Subjogo** (SPE) se e somente se ele é simultaneamente um equilíbrio de Nash para todos os subjogos (subárvores) do jogo quando restrito à s. Temos que um SPE sempre existe, ele é um equilíbrio puro de Nash do jogo em sua versão simultânea e também pode ser encontrado através de indução retrógrada. Referimos o leitor a [Nisan et al. 2007] para mais sobre jogos na forma extensiva.

[Leme et al. 2012] também introduziram a noção de Preço da Anarquia Sequencial o qual corresponde à pior relação entre o custo de um SPE e o custo de um resultado social ótimo relacionado à alguma função social. Dado uma função c representando o custo social de um jogo $\mathcal{G}$, seja $\mathrm{SPE}(\mathcal{G})$ o conjunto de todos os SPE de $\mathcal{G}$. O **Preço da Anarquia Sequencial** (SPoA) é definido como $\mathrm{SPoA}(c, \mathcal{G}) = \max_{A \in \mathrm{SPE}(\mathcal{G})} \frac{c(A)}{c^*}$, onde c^* representa o custo de um resultado social ótimo. Na próxima seção apresentamos nossos resultados sobre os valores do SPoA relacionados a ambas as funções sociais D e E para instâncias métricas e não-métricas do jogo de transporte sequencial.

Resultados

Instâncias não-métricas

Seguindo os resultados de [Fotakis et al. 2017] que mostram que o valor do Preço da Anarquia (PoA) é ilimitado para instâncias não-métricas do jogo de transporte na sua versão simultânea, mostramos que o valor do SPoA também é ilimitado considerando ambas as funções sociais D e E quando lidando com instâncias não-métricas, mesmo que todas as permutações dos ônibus sejam iguais.

Proposição 1 *O* SPoA *é ilimitado para D e E se as distâncias não forem métricas, mesmo que todas as permutações dos ônibus sejam iguais.*

Prova. (*esboço*) Considere a instância exibida na Fig. 1 com $n = m = 2$ e π sendo igual à permutação identidade, ou seja, $\pi_{b_1} = \pi_{b_2} = (1, 2)$. Na Fig. 2 podemos observar o jogo em sua forma extensiva, onde as folhas representam o custo dos jogadores 1 e 2 respectivamente. Observe que o jogador 2 sempre terá custo 1 não importando em qual ônibus ele decida viajar, então um possível SPE é aquele em que o jogador 2 sempre escolhe o mesmo ônibus escolhido pelo jogador 1 e portanto o jogador 1 terá custo $M + 1$. Temos que para D, o ótimo social vale 2 e o SPE vale $M+2$, enquanto que para E o ótimo social vale 1 e o SPE vale $M + 1$. Analisando o valor do SPoA para ambas as funções observa-se que para um M suficientemente grande ($M \to \infty$), temos que $\text{SPoA} = \infty$. □

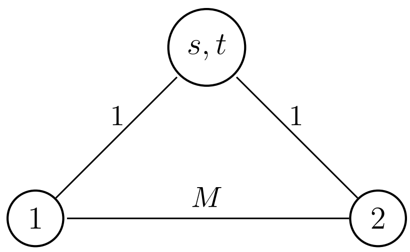

Figura 1. Instância não-métrica com $n = 2$ jogadores.

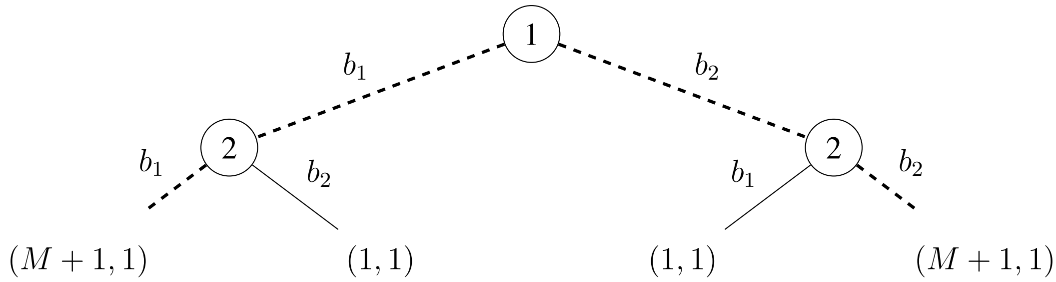

Figura 2. Jogo em sua forma extensiva.

Função D com instâncias métricas

A seguir mostramos que o valor do SPoA para instâncias métricas em relação à função social D é n. Esse valor é igual ao valor do PoA [Fotakis et al. 2017].

Teorema 3.1 *Em jogos de transporte métricos e sequenciais com n jogadores, com função social D,* $\text{SPoA} = n$.

Prova. O limitante superior vem de [Fotakis et al. 2017] onde temos que $D(\sigma) \leq nD(\sigma^*)$ para qualquer perfil σ e um perfil ótimo σ^*. Para o limitante inferior, considere uma instância (N, M, G) onde $|N| = n$, $M = \{b_1, \ldots, b_n\}$, e um grafo G tal que $d(s,u) = d(u,t) = 1$ para todo $u \in N$ e $d(u,v) = 0$ para todo $u, v \in N$. Considere que cada π_j, para $j \in M$, é uma permutação qualquer. É possível verificar que o único perfil ótimo σ^* é aquela em que todos os jogadores estão viajando juntos em um único ônibus, e portanto o $D(\sigma^*)$ é 1.

Agora basta mostrarmos que estas instâncias possuem um SPE com valor n, como por exemplo, uma solução onde cada ônibus está sendo usado por um único jogador. Observe que um jogador i sempre terá um custo de 1 não importando o que os outros jogadores escolherem. Consequentemente, considere o perfil σ onde o jogador i escolhe o ônibus b_i. Em σ o custo de cada jogador i é 1 e em qualquer outro ônibus o custo seria 1 também. Portanto, σ é um SPE com valor n. $\square$

Função E com instâncias métricas

Em contraste com os resultados sobre os valores do PoA relacionados com a função E apresentados em [Fotakis et al. 2017] ($\mathrm{PoA} = 2\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1$ para $n > m$ e $\mathrm{PoA} = 1$ se $n \leq m$), o próximo teorema mostra que o valor do SPoA é pior do que o encontrado no jogo em sua versão simultânea mesmo quando $n = m$.

Teorema 3.2 *Em jogos de transporte métricos e sequenciais com n jogadores, com função social E,* $\mathrm{SPoA} = 2n - 1$.

Prova. (*esboço*) Seja σ^* um perfil ótimo, o maior valor que uma solução pode alcançar é quando todos os jogadores escolhem viajar em um único ônibus, e argumentamos que este é um limitante superior para o SPoA de $(2n-1)E(\sigma^*)$. Esse valor é obtido através de um resultado auxiliar de [Fotakis et al. 2017] o qual afirma que $d(u,v) \leq 2E(\sigma^*)$ para todos os pares $(u,v) \in N$ e $d(u,t) \leq E(\sigma^*)$ para todos $u \in N$. Então, uma vez que todos os jogadores estão em um único ônibus, temos que o caminho que será percorrido pelo ônibus contém somente uma aresta conectada a t e as $(n-1)$ arestas restantes são utilizadas para buscar todos os jogadores. Portanto, esse caminho vale no máximo $(n-1)2E(\sigma^*) + E(\sigma^*) = (2n-1)E(\sigma^*)$.

Para o limitante inferior, mostramos uma família de instâncias com um SPE com valor igual ao limitante superior. Estas instâncias, dadas por (N, M, G) onde $|N| = |M| = n$, e um grafo G onde $d(s,u) = d(u,t) = 1$ para todos $u \in N$ e $d(u,v) = 2$ para todos $u, v \in N$. Considere que π_j, para $j \in M$, seja a permutação identidade, ou seja, $\pi_j = (1, \ldots, n)$. Observe que o perfil ótimo σ^* é aquele onde cada ônibus está sendo usado por um único jogador, e portanto temos que $E(\sigma^*) = 1$. Pode-se mostrar, através de indução retrógrada, que existe pelo menos um SPE nestas instâncias onde todos os jogadores escolhem o mesmo ônibus, e com isso teremos que $\mathrm{SPoA} \geq 2n - 1$. $\square$

Referências

Fotakis, D., Gourvès, L., and Monnot, J. (2017). Selfish transportation games. In *International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, pages 176–187. Springer.

Leme, R. P., Syrgkanis, V., and Tardos, É. (2012). The curse of simultaneity. In *Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference*, pages 60–67. ACM.

Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., and Vazirani, V. V. (2007). *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.