O Problema da Deposição Gamma é NP-Completo

Marcelo Fonseca Faraj[1], **Sebastián Urrutia**[1], **João Fernando Machry Sarubbi**[2]

[1]DCC – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Belo Horizonte – MG – Brasil

[2]DECOM – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)
Belo Horizonte – MG – Brasil

marcelo@gmail.com, surrutia@dcc.ufmg.br, joao@decom.cefetmg.br

Abstract. *Gamma Deployment is a metric to evaluate the quality of service in vehicular ad hoc networks (VANETs). Gamma Deployment Problem consists in applying that metric to minimize the amount of RSUs deployed in a VANET. In this work, we present a proof that the that problem is NP-Complete.*

Resumo. *Deposição Gamma é uma métrica usada para avaliar a qualidade de serviço oferecida por redes veiculares (VANETs). O Problema da Deposição Gamma consiste no emprego dessa métrica na minimização de RSUs para compor VANETs. Neste trabalho, prova-se que esse problema é NP-Completo.*

1. Introdução

Deposição Gamma ($\Gamma_D\binom{\tau}{\rho}$) (SILVA et al., 2016) é uma métrica para avaliar a qualidade de serviço de deposições de RSUs em redes veículares (VANETs) a partir de seu tráfico veicular. Ele disponibiliza dois parâmetros para o arquiteto da VANET atingir seus objetivos de projeto: o tempo de intercontato τ e cobertura percentual mínima exigida ρ. Um veículo é considerado coberto pela VANET caso não permaneça mais que τ segundos sem cruzar com alguma RSU. O parâmetro ρ fixa a fração mínima de veículos a se cobrir. Embora $\Gamma_D\binom{\tau}{\rho}$ tenha sido proposta como uma métrica, sua aplicação para minimizar a deposição de RSUs define o Problema da Deposição Gamma (PDG). Silva et al. (2016) propuseram uma formulação de programação linear inteira e uma heurística determinística para o PDG. Faraj et al. (2017) propõem um algoritmo memético para o PDG. Neste trabalho, prova-se que o PDG é NP-Completo, o que era apenas uma conjectura.

2. O Problema da Deposição Gamma

Seja um passeio T_i uma sequência de vértices tal que haja aresta entre cada par de vértices consecutivos. Seja $L(T_i)$ o número de vértices (distintos ou não) em T_i e seja $T_i[j]$ o vértice na posição j de T_i, $j \in \{1, ..., L(T_i)\}$. Considere-se a operação de subtrair um conjunto R de um passeio T_i como resultando em uma coleção de subpasseios de T_i, a qual é obtida pela remoção em T_i de todos os elementos em R. Essa operação será denotada por $T_i \setminus R$, como no exemplo: $(1, 7, 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7) \setminus \{1, 5\} = \{(7, 2, 3), (4), (6, 7)\}$.

Definição 1 (PDG). *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $T = \{T_1, ..., T_p\}$ uma coleção de passeios em G. Seja $F : T \times \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função associando um número positivo a cada etapa j de cada passeio $T_i \in T$, $j \in \{1, ..., L(T_i)\}$. Seja $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho \in [0\%, 100\%]$ e $K \in \mathbb{Z}_+^*$ parâmetros adicionais ao problema. O PDG consiste em determinar se existe ou não um conjunto $R \subseteq V$ tal que $|R| \leq K$ e, para pelo menos uma fração ρ dos passeios $T_i \in T$, é satisfeita a desigualdade $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) < \tau$ para todo $C \in T_i \setminus R$.*

Para certificar a corretude de uma instância SIM, deve-se verificar se cada $C \in T_i \setminus R$ satisfaz $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) < \tau$, o que pode ser executado em tempo polinomial, uma vez que $|T_i \setminus R| < L(T_i)$ Assim, fica claro que o PDG pertence à classe NP. Silva et al. (2016) trataram da situação em que G possuía topologia de grade e propuseram uma discretização simples para expressar qualquer rede rodoviária como grade. Por isso, este trabalho dá um enfoque especial ao Problema da Deposição Gamma em Grades (PDGG).

3. As Demonstrações

A partir do Problema da Cobertura de Arestas por Vértices em Grafos Planares com Grau Máximo 3 (PCAVGPGM3), que é NP-Completo (GAREY; JOHNSON, 1977), será feita uma redução polinomial ao Problema da Cobertura de Caminhos por Vértices em Grades (PCCVG), não definido na literatura. Dele, faz-se uma redução polinomial para o PDGG. Seguem-se definições para os problemas intermediários utilizados nas demonstrações.

Definição 2 (PCAVGPGM3)**.** *Dado um grafo plano $G = (V, E)$, no qual todos os vértices tem grau menor ou igual a 3, e um número inteiro positivo K, existe um conjunto $R \subseteq V$ tal que todas as arestas em E têm pelo menos uma extremidade em R e $|R| \leq K$?*
Definição 3 (PCCVG)**.** *Dada uma grade $G = (V, E)$, uma coleção S de caminhos simples em G e um número inteiro positivo K, existe um conjunto $R \subseteq V$ tal que todo caminho $P \in S$ possua ao menos um vértice de R e $|R| \leq K$?*

Lema 1. *O PCCVG é NP-Completo.*
Demonstração. Dado um grafo plano $G = (V, E)$ com grau máximo menor ou igual a 3 e com $K \in \mathbb{Z}_+^*$, busca-se construir uma grade G', uma coleção de caminhos S e um número $K' \in \mathbb{Z}_+^*$. Deve haver uma cobertura R de arestas por vértices em G com $|R| \leq K$ se, e somente se, houver uma cobertura R' dos caminhos em S por vértices, no grafo $G' = (V', E')$, com $|R'| \leq K'$. Seja $V = \{1, ..., n\}$ e $|E| = m$.

Em uma Incorporação em Livro de um grafo $G = (V, E)$, cada vértice é posto linearmente na espinha do livro seguindo a ordem dada por $F_V : V \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$ e cada aresta é atribuída a uma de suas páginas por $F_E : E \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$. Cada página é um semiplano que parte da espinha do livro. As arestas atribuídas a uma página estão nela contidas e não se tocam. Heath (1985) mostrou como incorporar qualquer grafo plano com grau máximo menor ou igual a 3 em um livro de 2 páginas polinomialmente. Na primeira etapa da nossa transformação, incorpora-se G em um livro de 2 páginas, como exemplifica a Figura 1.

Seja $G'=(V', E')$ uma grade com $V'=\{1, ..., 3n\}\times\{1, ..., 2n - 1\}$ e $E'=\{((a, b), (c, d)), \forall(a, b), (c, d)\in V' : (|a-c|=1 \wedge b=d) \vee (a=c \wedge |b-d|=1)\}$. Seja $H = \{(3(F_V(v))-1, n), \forall v\in V(G)\}\subset V'$. Seja $S=\{S_1, ..., S_m\}$ uma coleção com m caminhos, cada um deles subgrafo de G', correspondente a uma das arestas em $E(G)$ e com vértices extremos contidos em H. Cada caminho de $(a, b)\in H$ para $(c, d)\in H$ é construído segundo as regras seguintes. Regra (1): Cada caminho tem uma componente vertical. Se a aresta $e\in E(G)$ correspondente for tal que $F_E(e)$ é a página esquerda, essa componente passa por vértices na coluna $n-\frac{|b-d|}{3}$. Caso contrário, na coluna $n+\frac{|b-d|}{3}$. Regra (2): Se uma página de $v\in V(G)$ contiver 1 aresta, o caminho correspondente em S tem componente horizontal iniciada no vértice $(3(f_V(v))-1, n)$ que toca a componente vertical feita na regra (1). Regra (3): Se uma página de $v\in V(G)$ contiver 2 ou 3 arestas, cada caminho correspondente deixa o vértice $(3(f_V(v))-1, n)$ em uma direção diferente (norte, sul ou horizontal) com base na regra (1), evitando cruzamento. Após passar por um vértice, o caminho prossegue horizontalmente até encontrar a componente feita na regra (1).

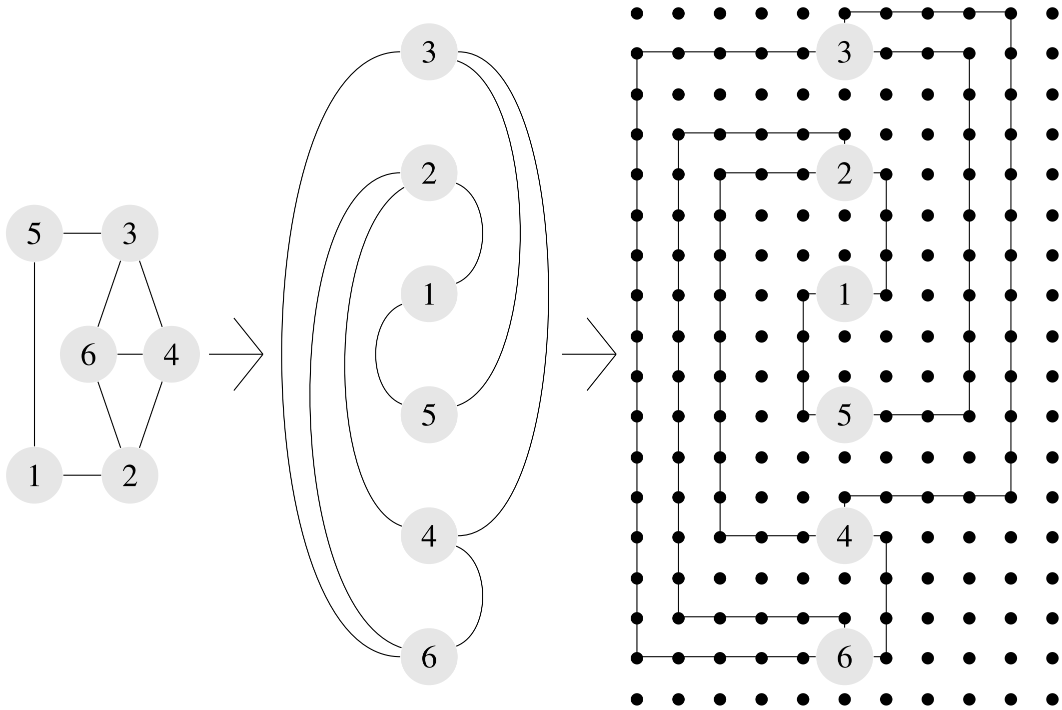

Figura 1. Incorporação de um grafo planar com grau máximo menor ou igual a 3 em um livro de 2 páginas e subsequente transformação em caminhos em grade.

Será provado que $\forall S_1, S_2 \in S, S_1 \cap S_2 \subseteq H$. Suponha-se que existam $S_1 = (u_1, ..., u_2)$ e $S_2 = (w_1, ..., w_2)$ com $S_1 \cap S_2 \nsubseteq H$ e, sem perda de generalidade, seja $F_V(u_1){<}F_V(u_2)$, $F_V(w_1){<}F_V(w_2)$ e $F_V(u_1){\leq}F_V(w_1)$. Para simplificar, serão usados os mesmos símbolos (u_1, u_2, w_1 e w_2) para se referir aos vértices extremos de S_1 e S_2 e aos vértices correspondentes em $V(G)$. Seja o caso em que S_1 e S_2 tenham uma extremidade coincidente. Pela regra (3), os subcaminhos horizontais dessa extremidade de S_1 e S_2 ocorrem disjuntos nas três linhas em torno da extremidade correspondente, o que é sempre possível devido ao grau máximo de G. A regra (1), adicionalmente, garante que não ocorrerá intercepção em qualquer ponto de S_1 e S_2 que não pertença a H. Considere-se agora o caso em que u_1, u_2, w_1 e w_2 são vértices distintos. São disjuntos os caminhos caso $F_V(u_1)$ e $F_V(u_2)$ sejam ambos maiores ou menores do que $F_V(w_1)$ e $F_V(w_2)$. No caso em que $F_V(u_1){<}F_V(w_1){<}F_V(w_2){<}F_V(u_2)$, não ocorre intersecção de caminhos devido à regra (1). A única opção restante é $F_V(u_1){<}F_V(w_1){<}F_V(u_2){<}F_V(w_2)$. Nesse caso, as arestas $(u_1, u_2), (w_1, w_2){\in}E(G)$ devem certamente pertencer a páginas diferentes na incorporação em livro do grafo, ou seja, $F_E(u_1, u_2){\neq}F_E(w_1, w_2)$. Logo, $S_1 \cap S_2 \subseteq H$.

A Figura 1 exemplifica toda a transformação. É possível encontrar uma cobertura R' de caminhos por vértices com $|R'|{\leq}K'{=}K$? No parágrafo seguinte, prova-se por absurdo que a resposta para o PCAVGPGM3 é SIM se, e somente se, também for SIM para o PCCVG em (G', S, K'). O PCCVG está em NP, pois, dado um certificado R' para uma instância SIM (G', S, K'), basta checar se $|R'| \leq K'$ e se $S_i \cap R' \neq \emptyset, \forall S_i \in S$.

Suponha-se que $\exists R{\subseteq}V(G)$, com $|R|{\leq}K$, que é cobertura de arestas por vértices em (G, K) e que a resposta para o PCCVG em (G', S, K') é NÃO. Como cada vértice de H é associado biunivocamente a um vértice de $V(G)$, é possível obter um conjunto $R'{\subseteq}H$ a partir dos elementos de H associados a R. Como cada caminho em S tem as extremidades em H e iguais às extremidades das arestas de $E(G)$, R' é uma cobertura para S em G'

e tem-se $|R'| \leq K'$, o que contradiz a hipótese. Suponha-se, agora, que $\exists R' \subseteq V(G')$, com $|R'| \leq K'$, que é uma cobertura de caminhos por vértices para (G', S, K') e que a resposta para o PCAVGPGM3 em (G, K) é NÃO. Pela construção proposta, os vértices em $V(G') \backslash H$ pertencem a, no máximo, um caminho em S. Se $\exists S_i \in S$ com $S_i \cap (R' \setminus H) \neq \emptyset$, $u \in S_i \cap (R' \backslash H)$ cobre exclusivamente S_i. Logo, pode-se remover u de R' e substituí-lo por um vértice em $H \cap S_i$. Repetindo isso exaustivamente, obtém-se cobertura de caminhos por vértices $R'' \subseteq H$, $|R''| = K'$. Assim, pode-se resolver o PCAVGPGM3 com $R \subseteq V(G)$, $|R| = K'$, obtendo cada vértice de V associado a R'', o que contradiz a hipótese. $\square$

Teorema 1. *O PDG é NP-Completo*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ uma grade com $V = \{v_{ab}, \forall (a, b) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}\}$ e $E = \{(v_{ab}, v_{cd}), \forall \{v_{ab}, v_{cd}\} \subseteq V : (a - c = 1 \wedge b = d) \vee (a = c \wedge b - d = 1)\}$. Seja $S = \{S_1, ..., S_p\}$ uma coleção de subgrafos de G tal que $S_i \in S$ é um caminho em G. Com $K \in \mathbb{Z}^*_+$, pode-se obter uma cobertura de caminhos por vértices $R \subseteq V$ com $|R| \leq K$? Dada essa instância do PCCVG, que será referida por $PCCVG(G,S,K)$, constrói-se a instância $PDGG(G', T,F,\tau,\rho,K')$, do PDGG. Em seguida, mostra-se que $PCCVG(G,S,K)$ é uma instância SIM se, e somente se, $PDGG(G',T,F,\tau,\rho,K')$ também é. O PDG pertence a NP, pois um certificado R^* de SIM pode ser checado em tempo polinomial como mostrado na seção 2.

Seja $G' = G$, $T = S$, $K' = K$, $\tau = 1$ e $\rho = 100\%$. Para cada passeio $T_i \in T$, F é função definida como $F(T_i, x) = \frac{1}{L(T_i)}, \forall x \in \{1, ..., L(T_i)\}$. Após essa transformação, a seguinte igualdade é válida para cada $T_i \in T$: $\sum_{c=1}^{L(T_i)} F(T_i, c) = 1 = \tau$ Suponha-se que $\exists R \subseteq V$ que é solução para $PCCVG(G, S, K)$ e não para $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$. Assim, $\exists T_i \in T$ contendo subpasseio $C \in T_i \backslash R$ que satisfaça $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) \geq \tau$. Como $\sum_{c=1}^{L(T_i)} F(T_i, c) = \tau$, pode-se deduzir que $T_i \cap R = \emptyset \to S_i \cap R = \emptyset$. Logo, R não resolve $PCCVG(G,S,K)$ já S_i não está coberto, o que é uma contradição. Seguindo, suponha-se que $\exists R \subseteq V(G')$ que é solução para $PDGG(G', T, F, \tau, \rho, K')$ mas não para $PCCVG(G, S, K)$. Assim, há um caminho $S_i \in S$, $S_i \cap R = \emptyset$. Como $T_i = S_i$, então $T_i \cap R = \emptyset$ e $T_i \backslash R = \{T_i\}$. Logo, $\exists C \in T_i \backslash R$, $\sum_{c=1}^{L(C)} F(C, c) = \tau$, o que contradiz a hipótese de que R resolve o PDGG. $\square$

Corolário 1. *O PDGG é NP-Completo.*
Corolário 2. *O PDGG com $\rho = 1$ é NP-Completo.*

Referências

FARAJ, M. F.; SARUBBI, J. a. F. M.; SILVA, C. M. da; MARTINS, F. V. C. A hybrid genetic algorithm for deploying RSUs in VANETs based on inter-contact time. In: **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion**. New York, NY, USA: ACM, 2017. (GECCO '17), p. 193–194. ISBN 978-1-4503-4939-0. Disponível em: ⟨http://doi.acm.org/10.1145/3067695.3076032⟩.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. The rectilinear steiner tree problem is NP-complete. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, SIAM, v. 32, n. 4, p. 826–834, 1977.

HEATH, L. S. **Algorithms for embedding graphs in books**. Tese (Doutorado) — University of North Carolina at Chapel Hill, 1985.

SILVA, C. M.; GUIDONI, D. L.; SOUZA, F. S.; PITANGUI, C. G.; SARUBBI, J. F.; PITSILLIDES, A. Gamma deployment: Designing the communication infrastructure in vehicular networks assuring guarantees on the V2I inter-contact time. In: IEEE. **Mobile Ad Hoc and Sensor Systems (MASS), 2016 IEEE 13th International Conference on**. [S.l.], 2016. p. 263–271.