Sobre Finura Própria de Grafos

Moysés S. Sampaio Jr.[1*], **Fabiano S. Oliveira**[2†], **Jayme L. Szwarcfiter**[1,2‡]

[1]COPPE/PESC – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brasil

[2]IME – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Brasil

moysessj@cos.ufrj.br, fabiano.oliveira@ime.uerj.br, jayme@nce.ufrj.br

Abstract. *Both graph classes of k-thin and proper k-thin graphs have recently been introduced generalizing interval and unit interval graphs, respectively. The complexity of the recognition of k-thin and proper k-thin are open, even for fixed $k \geq 2$. In this work, we introduce a subclass of the proper 2-thin graphs, called proper 2-thin of precedence. For this class, we present a characterization and an efficient recognition algorithm.*

1. Introdução

A classe dos grafos k-finos foi introduzida em [Mannino et al. 2007] como uma generalização da classe dos grafos de intervalo. Motivados por isto, [Bonomo, Estrada 2017] definiram a classe dos grafos k-finos próprios que, de forma similar, generalizam os grafos de intervalo próprio. As complexidades dos problemas de reconhecer os grafos k-finos e k-finos próprios, mesmo para $k \geq 2$ fixo, encontram-se em aberto. Neste trabalho, estudamos uma subclasse dos grafos k-finos próprios, que chamamos de k-finos próprios de precedência, para a qual apresentamos uma caracterização estrutural e um algoritmo eficiente de reconhecimento.

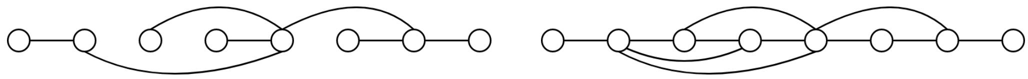
Um *grafo de intervalo* G é um grafo tal que $V(G)$ é uma família de intervalos fechados da reta real, chamado de *modelo*, tal que $(I, J) \in E(G)$ se, e somente se, $I \cap J \neq \emptyset$. Em [Olariu 1991], mostra-se que um grafo G é de intervalo se, e somente se, existir uma ordenação $<$ de $V(G)$ tal que, para qualquer tripla ordenada (p, q, r) de vértices de G, se $(p, r) \in E(G)$, então $(q, r) \in E(G)$. Tal ordenação $<$ é chamada *canônica* de $V(G)$. A Figura 1(a) ilustra um grafo de intervalo e uma de suas ordens canônicas. Um grafo de intervalo G é dito *próprio* se admite um modelo tal que $I \nsubseteq J$, para todo $I, J \in V(G)$ distintos. Similarmente, G é um grafo de intervalo próprio se, e somente se, admite uma ordenação $<$ de $V(G)$ tal que, para qualquer tripla ordenada (p, q, r) de vértices, se $(p, r) \in E(G)$ então $(p, q), (q, r) \in E(G)$ [Roberts 1969]. Tal ordenação é denominada de *canônica própria*, como ilustrado na Figura 1(b).

Um grafo G é denominado *k-fino* se existir um k-particionamento de $V(G)$ e uma ordenação associada (chamada de *consistente*) tal que, para qualquer tripla ordenada (p, q, r) de $V(G)$, se p e q pertencerem a uma mesma parte e $(p, r) \in E(G)$, então $(q, r) \in E(G)$. Um grafo G é dito *k-fino próprio* se existir uma k-partição de $V(G)$ e uma ordenação associada (chamada de *fortemente consistente*) que é consistente e tal que, para qualquer tripla ordenada (p, q, r) de $V(G)$ se q e r pertencerem a uma mesma

[*]financiado por CAPES.

[†]parcialmente financiado por FAPERJ.

[‡]parcialmente financiado por CNPq.

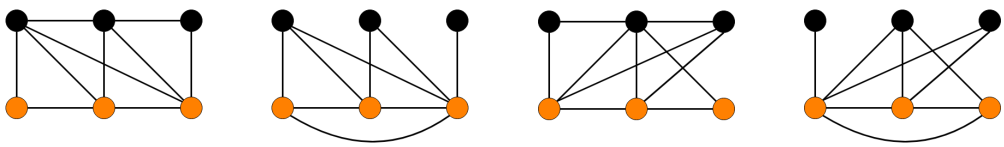


(a) (b)

Figura 1. Exemplos de sequências (a) canônicas e (b) canônicas próprias.

parte e $(p, r) \in E(G)$, então $(p, q) \in E(G)$. O valor mínimo de k para o qual G é k-fino (resp. k-fino próprio) é chamado de *finura* (resp. *finura própria*) de G, denotado por $thin(G)$ (resp. $pthin(G)$). Note que, os grafos k-finos são uma generalização dos grafos de intervalo, e que os grafos k-finos próprios generalizam os grafos de intervalo próprios.

Em [Bonomo, Estrada 2017], é apresentado um algoritmo eficiente para determinar o particionamento mínimo de $V(G)$ para o qual uma dada ordenação é consistente, ou fortemente consistente. Além disso, prova-se que o problema de determinar se existe uma ordenação consistente, ou fortemente consistente, dado um particionamento é NP-completo. De uma maneira geral, mesmo para $k \geq 2$ fixo, a complexidade de decidir se um grafo é k-fino ou k-fino próprio encontra-se em aberto. Neste trabalho investigamos o problema para uma classe de grafo mais restrita, definida por admitir uma ordenação fortemente consistente que goza de uma propriedade especial. Mais especificamente, chamaremos um grafo G de 2-*fino próprio de precedência* (2-FPP) se G é um grafo 2-fino próprio que admite bipartição (X, Y) de $V(G)$ e uma ordenação fortemente consistente $<$ na qual todos os vértices de X precedem aqueles de Y em $<$. A Figura 2(a) ilustra um grafo que é 2-FPP e, na Figura 2(c), é ilustrado um grafo que não é 2-FPP com respeito a bipartição escolhida. A convenção da representação destas figuras é a de que os vértices das partes da bipartição (X, Y) associada são dispostos horizontalmente, cada parte em uma horizontal, e a ordem da esquerda para direita é aquela encontrada em uma ordenação fortemente consistente. Além disso, por convenção, os vértices que estão embaixo precedem os que estão em cima na ordenação fortemente consistente.



(a) (b) (c) (d)

Figura 2. (a)(c) Grafos e bipartição (X, Y) dados; (b)(d) Grafos $S(X, Y)$.

2. Reconhecimento dos Grafos 2-FPP com Dada Bipartição

Nesta seção, apresentaremos um algoritmo eficiente para o seguinte problema:

PROBLEMA:	Reconhecimento dos grafos 2-FPP com bipartição dada
ENTRADA:	Um grafo G e uma bipartição (X, Y) de $V(G)$ com $G[X]$ e $G[Y]$ conexos
QUESTÃO:	Existe uma ordenação $<$ de $V(G)$ consistente com (X, Y) tal que cada vértice de X precede cada vértice de Y em $<$?

Naturalmente, $G[X]$ e $G[Y]$ devem ser grafos de intervalo próprio. Em caso negativo, o algoritmo pode responder NÃO. Em caso positivo, sabe-se que $G[X]$ admite uma única ordenação canônica a menos de reversão e permutação entre os vértices *gêmeos* (vértices com mesma vizinhança fechada em $G[X]$). O mesmo pode ser dito para $G[Y]$. Sejam s_X e s_Y ordenações canônicas arbitrárias de $G[X]$ e $G[Y]$, respectivamente. Denote por s^{-1} a reversão de uma ordenação s. O algoritmo prossegue para cada $(s_1, s_2) \in (\{s_X, s_X^{-1}\} \times \{s_Y, s_Y^{-1}\})$ verificando se existe uma ordenação s, obtida da concatenação de s_1 com s_2 e de eventual permutação de vértices que são gêmeos em $G[X]$ ou em $G[Y]$, que seja fortemente consistente com (X, Y). Tal verificação é feita da seguinte forma.

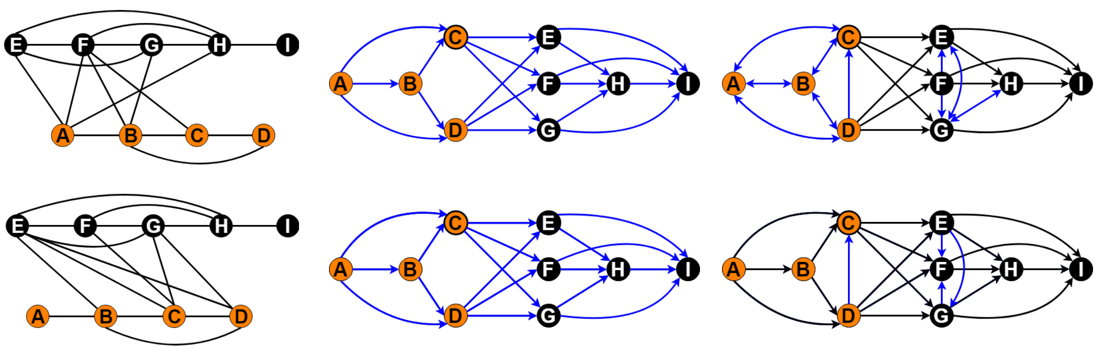
O algoritmo utilizará um digrafo D_G associado a G no qual as arestas direcionadas representam ordens forçadas entre os vértices de s. Caso hajam relações de ordem mutuamente contraditórias, o que consiste na aparição de um ciclo em D_G, o par (s_1, s_2) vigente é ignorado e o próximo é considerado. Caso contrário, qualquer ordenação que respeite as relações definidas pelas arestas de D_G será consistente com (X, Y), situação que o algoritmo responderá SIM e retornará uma ordenação topológica de D_G como um certificado dessa resposta. Se um ciclo for encontrado em cada par (s_1, s_2) investigado, o algoritmo responderá NÃO e retornará como certificado da resposta negativa os ciclos encontrados. As regras que forçam ordens relativas entre vértices serão as seguintes:

(i) Seja X' (resp. Y') o conjunto formado pelo último vértice de s_1 e seus gêmeos em $G[X]$ (resp. o conjunto formado pelo primeiro vértice de s_2 e seus gêmeos em $G[Y]$). Para todo $u \in X'$, $v \in Y'$, (u, v) é uma aresta forçada em D_G;

(ii) para todo $u, v \in X$, se u e v não são gêmeos em $G[X]$ e $u < v$ em s_1, então (u, v) é uma aresta forçada em D_G. Analogamente, para todo $u, v \in Y$, se u e v não são gêmeos em $G[Y]$ e $u < v$ em s_2, então (u, v) é uma aresta forçada em D_G;

(iii) para todo $u, v \in X$ e $w \in Y$, se $(u, w) \notin E(G)$ e $(v, w) \in E(G)$, então (u, v) é uma aresta forçada em D_G. Analogamente, para todo $u, v \in Y$ e $w \in X$, se $(u, w) \in E(G)$ e $(v, w) \notin E(G)$, então (u, v) é uma aresta forçada em D_G.

O algoritmo pode ser implementado em tempo $O(n^2)$.



(a) (b) (c)

Figura 3. Dois exemplos de execução do algoritmo. (a) grafo e bipartição de entrada; (b) D_G considerando arestas forçadas nos passos (i) e (ii); (c) D_G considerando arestas forçadas no passo (iii).

3. Caracterização dos Grafos 2-FPP com Dada Bipartição

Nesta seção apresentamos uma caracterização dos grafos 2-FPP com dada bipartição. Um grafo G é um grafo *de divisão* se existir uma bipartição (X, Y) de $V(G)$ tal que X seja uma clique e Y um conjunto independente. Um grafo é dito *de limiar* se G é um grafo de divisão que admite uma ordenação dos vértices de X (resp. Y), chamada de *ordenação de limiar*, de modo que suas vizinhanças estejam ordenadas por inclusão, isto é, se u precede v na ordenação, então $N[u] \subseteq N[v]$ (resp. $N(u) \subseteq N(v)$). Para a caracterização a seguir, definiremos o grafo de divisão $S(X, Y)$ associado à bipartição de entrada (X, Y), obtido de G pela adição e remoção de arestas de modo que X se torne uma clique e Y se torne um conjunto independente. As Figuras 2(b) e 2(d) ilustram os grafos de divisão associados aos grafos das Figuras 2(a) e 2(c), respectivamente.

Teorema 1. *Se G é um grafo e (X, Y) é uma bipartição de $V(G)$, então G é 2-FPP com respeito a (X, Y) se, e somente se, existir ordenações canônicas s_X, s_Y de respectivamente $G[X]$ e $G[Y]$ tais que $S(X, Y)$ é um grafo de limiar para o qual s_X corresponda a uma ordenação de limiar de X e s_Y^{-1} a uma ordenação de limiar de Y.*

Demonstração. Suponha que G é 2-FPP com respeito a bipartição (X, Y) de $V(G)$ e s é uma ordenação consistente própria associada. Seja s_X (resp. s_Y) o prefixo (resp. sufixo) de s correspondente aos vértices de X (resp. Y). Naturalmente, s_X e s_Y são ordens canônicas de $G[X]$ e $G[Y]$, respectivamente. Suponha que s_X não é uma ordenação de limiar de X. Então, existem $u, v \in X$ e $w \in Y$ com $u < v$ em s_X tais que $w \in N[u]$ e $w \notin N[v]$. Mas então $(u, w) \in E(G)$, $(v, w) \notin E(G)$ e $u < v < w$ em s, contrariando s ser uma ordenação fortemente consistente. Suponha agora que s_Y^{-1} não é uma ordenação de limiar para Y, e logo existem $u, v \in Y$ e $w \in X$ com $u < v$ em s_Y tais que $w \in N(v)$ e $w \notin N(u)$. Mas então $(v, w) \in E(G)$, $(u, w) \notin E(G)$ e $w < u < v$ em s, o que contraria s ser uma ordenação fortemente consistente. Por outro lado, considere que s_X e s_Y^{-1} são ordenações de limiar de X e Y e canônicas de $G[X]$ e $G[Y]$. Mostraremos que $s = s_X s_Y$ é uma ordenação fortemente consistente com respeito a bipartição dada (X, Y), seguindo o resultado. Na suposição do contrário, existiria (i) $u, v \in X$, $w \in Y$ com $u < v$ em s tais que $(u, w) \in E(G)$, $(v, w) \notin E(G)$, ou (ii) $u, v \in Y$, $w \in X$ com $u < v$ em s tais que $(v, w) \in E(G)$, $(u, w) \notin E(G)$. No caso (i) (resp. (ii)), há contradição com o fato de s_X (resp. s_Y^{-1}) ser uma ordenação de limiar para X (resp. Y). $\square$

4. Conclusão

Este trabalho foi motivado pelos problemas de determinar a finura, e a finura própria em grafos. A introdução de ambos os parâmetros é um conceito relativamente recente e foi motivada por uma generalização do bem-conhecido problema de reconhecimento de grafos de intervalo e de intervalo unitários. A complexidade de reconhecer se um grafo é k-fino ou k-fino próprio encontra-se em aberto mesmo para $k \geq 2$ fixo. Neste trabalho, introduzimos a classe dos grafos 2-finos próprios de precedência (2-FPP) e apresentamos um algoritmo de reconhecimento polinomial e uma caracterização estrutural da classe.

Referências

Bonomo, F., Estrada, D. (2017). On the thinness and proper thinness of a graph. *CoRR*, abs/1704.00379.

Mannino, C., Oriolo, G., Ricci, F.,, Chandran, S. (2007). The stable set problem and the thinness of a graph. *Operations Research Letters*, 35:1–9.

Olariu, S. (1991). An optimal greedy heuristic to color interval graphs. *Information Processing Letters*, 37:21–25.

Roberts, F. (1969). Indifference graphs. Em Harary, F., editor, *Proof Techniques in Graph Theory*, p. 139–146. Academic Press, New York.