

Grafos Bipartidos Completos em $\text{ORTH}[3, 3, t]$

Claudson F. Bornstein¹, José Wilson C. Pinto^{2,3}, Jayme L. Szwarcfiter^{2,4}

¹DCC-IM – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

²PESC-COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

³Faculdade de Educação Tecnológica do Estado do Rio de Janeiro (FAETERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

⁴Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

cfb@cos.ufrj.br, jwcoura@cos.ufrj.br, jayme@cos.ufrj.br

Abstract. *In this paper, we investigate under what conditions a graph $K_{m,n}$ belongs to the class $\text{ORTH}[3, 3, t]$ introduced by [Jamison and Mulder 2000]. We show that $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$, corroborating a conjecture of Jamison and Mulder in [Jamison and Mulder 2005]. The main result of this work is the proof of the existence of a graph $G \subseteq K_{n,n}$ and $G \in \text{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$, if n is a power of 2 and $n \geq 4$.*

Resumo. *Neste trabalho, nós investigamos sob quais condições um grafo $K_{m,n}$ pertence à classe $\text{ORTH}[3, 3, t]$ introduzida por [Jamison and Mulder 2000]. Mostramos que $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$, corroborando uma conjectura de Jamison e Mulder em [Jamison and Mulder 2005]. O principal resultado deste trabalho é a prova da existência de um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in \text{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$, se n é uma potência de 2 e $n \geq 4$.*

1. Introdução

Uma (h, s, t) -representação de um grafo G [Jamison and Mulder 2000] consiste em representar G como grafo de interseção de subárvores, de grau máximo s , com $s \leq h$, de uma árvore hospedeira T de grau máximo h , tal que dois vértices são adjacentes em G se e somente se as suas subárvores têm interseção de tamanho pelo menos t , ou seja, compartilham no mínimo t nós em T . Denotamos por $[h, s, t]$ a classe de grafos que admitem uma (h, s, t) -representação. Um grafo G é $\text{ORTH}[h, s, t]$ se possui uma (h, s, t) -representação ortodoxa. Isto é, uma (h, s, t) -representação de G na qual cada uma das subárvores que representam os vértices de G são tais que suas folhas também são folhas da árvore hospedeira T , e duas subárvores compartilham uma folha se e somente se os vértices correspondentes são adjacentes em G . As classes $[h, s, t]$ e $\text{ORTH}[h, s, t]$ já são estudadas há algum tempo. Os grafos da classe $[\infty, \infty, 1]$ são grafos de interseção de subárvores, e em 1974 Gavril [Gavril 1974] mostrou que esta classe corresponde à família dos grafos cordais. Por outro lado, a classe $[\infty, \infty, 2]$ inclui todos os grafos, uma vez que é possível representar um grafo arbitrário G como um grafo de interseção de subestrelas de uma estrela. A estrela consiste de um

vértice central c e um vértice para cada aresta de $E(G)$. Cada vértice $v \in V(G)$ corresponde a uma estrela de centro c e os vértices correspondentes as arestas que incidem em v [Jacobson et al. 1991, Teorema 2.1]. Em [Jamison and Mulder 2000, Jamison and Mulder 2005], os autores atribuem a [McMorris and Scheinerman 1991] o resultado $[\infty, \infty, 1] = \text{ORTH}[3, 3, 1] = \text{ORTH}[3, 3, 2]$. As classes $[\infty, 2, 1]$ e $[\infty, 2, 2]$ que coincidem, respectivamente, com grafos VPT e grafos EPT foram bastante estudadas em [Golombic and Jamison 1985b, Golombic and Jamison 1985a]. Golombic, Lipshteyn, e Stern [Golombic et al. 2008] estudaram em detalhes as classes $[h, 2, t]$ e $\text{ORTH}[h, 2, t]$, e mostraram que $\text{ORTH}[\infty, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 2]$, e que $\text{ORTH}[\infty, 2, 1]$ é uma subclasse própria de $\text{ORTH}[\infty, 2, 2]$. Neste trabalho os autores perguntam se $\text{ORTH}[\infty, 2, t]$ e $\text{ORTH}[3, 2, t]$ coincidem. Em [Bornstein et al. 2017], foi mostrado que $\text{ORTH}[\infty, 2, t]$ e $\text{ORTH}[3, 2, t]$ não coincidem e foi exibido um conjunto infinito de grafos que pertencem a $\text{ORTH}[\infty, 2, t]$ e não pertencem a $\text{ORTH}[3, 2, t]$. Em [Jamison and Mulder 2000], os autores estudam detalhadamente as classes $[3, 3, t]$ e $\text{ORTH}[3, 3, t]$. Eles mostram que $[\infty, \infty, 1] = [3, 3, 1] = \text{ORTH}[3, 3, 1] = [3, 3, 2] = \text{ORTH}[3, 3, 2]$. Além disso, a Conjectura 1 é apresentada juntamente com uma questão *Qual o menor valor de t tal que $K_{n,n} \in [3, 3, t]$?* Nosso trabalho exhibe na Seção 2 a prova que $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$ que corrobora a Conjectura 1. Na Seção 3 provamos que um grafo $G \subseteq K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$ para n potência de 2 maior ou igual a 4.

Conjectura 1. *Para $n \geq 3$, o grafo $K_{n,n}$ tem uma representação $(3, 3, n)$ -fiel, mas não tem uma representação $(3, 3, n)$ -ortodoxa ou uma representação $(3, 3, t)$, com $t < n$.*

2. $K_{n,n} \notin \text{ORTH}[3, 3, n]$

Nesta seção mostramos que o grafo $K_{4,4}$ não pertence à classe $\text{ORTH}[3, 3, 4]$, o que reforça a Conjectura 1.

Teorema 2. *O grafo $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$.*

Prova. Considere o grafo $G = K_{4,4}$ com partes $\mathcal{L} = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que $K_{4,4} \in \text{ORTH}[3, 3, 4]$ e que (T, \mathcal{S}) seja sua representação. Cada vértice $v \in V(G)$ corresponde a uma subárvore $S_v \in \mathcal{S}$. Considere $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{S}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{L} e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{S}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{N} . Como a representação é ortodoxa a árvore hospedeira T deve possuir, no mínimo, $|\mathcal{L} \times \mathcal{N}| = 16$ folhas. Para facilitar vamos dividir nossa prova em três casos. Caso 1: em (T, \mathcal{S}) , a distância entre duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, digamos S_1 e S_2 , é maior ou igual a 2 (duas arestas). Neste caso, existe um caminho mais curto P entre S_1 e S_2 , com $|P| \geq 3$ (nós). Sejam $x = P \cap S_1$, $z = P \cap S_2$ e y um nó de P tal que $y \notin S_1 \cup S_2$. Obrigatoriamente, as quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham todos os nós de P . Assim, $|P| \geq 4$, implica uma interseção proibida entre subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Se $|P| = 3$, como duas subárvores quaisquer de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ não podem compartilhar folhas, e T possui grau máximo 3, existe um nó $x' \notin P$, que é compartilhado por ao menos duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Então, existem duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ cuja interseção tem tamanho 4, o que não é permitido nesta representação. Caso 2: a distância entre duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, digamos S_1 e S_2 , é igual a 1. Considere a aresta xy onde $x \in S_1$ e $y \in S_2$. Obrigatoriamente, as quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham xy . Sejam T_x e T_y subárvores de $T - xy$ com raízes x e y , respectivamente. Duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ não podem compartilhar um nó de nível maior que 2 em T_x ou T_y , caso contrário a interseção entre elas será maior que 3, o que produz

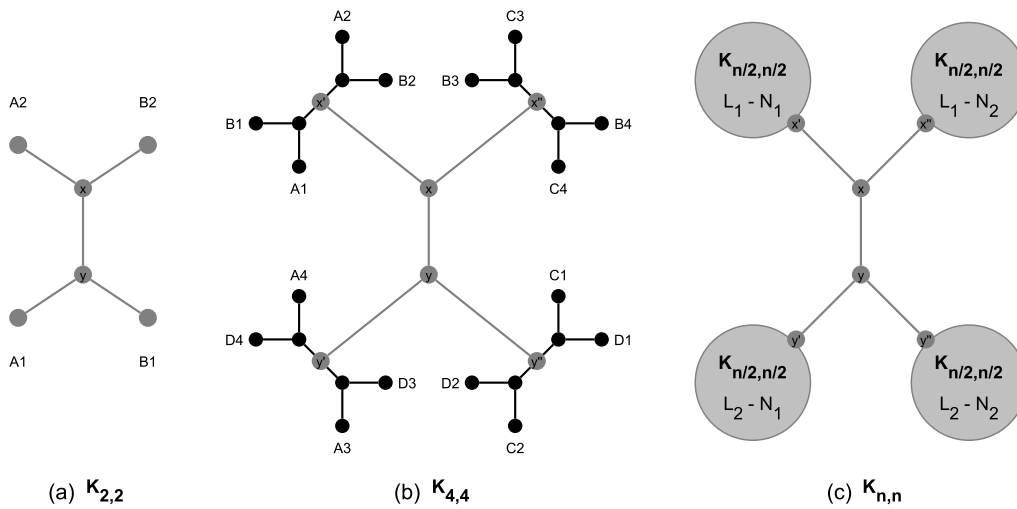


Figure 1. Construção da representação do $K_{n,n}$ a partir da construção do $K_{n/2, n/2}$

uma adjacência proibida. Duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ não podem compartilhar um nó de nível maior que 3 em T_x ou T_y , caso contrário existirá interseção de tamanho 4. Em uma representação ortodoxa todos os nós internos de T são compartilhados por pelo menos duas subárvores da mesma parte. Então, todos os nós de nível 4 são folhas. Como já vimos anteriormente, T possui no mínimo 16 folhas. Sendo assim, a subárvore T_x possui 4 nós internos de nível 3, os quais devem ser compartilhados por pares de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Em T_x , as três subárvores S_1 , S_3 e S_4 de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, compartilham o nó x , caso contrário a distância até S_2 seria maior que 1. Cada par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ compartilha apenas um nó no nível 3. Como em T_x temos quatro nós de nível 3 e apenas os três pares (S_1S_3) , (S_1S_4) e (S_3S_4) não é possível construir esta representação. Caso 3: a distância entre duas subárvores quaisquer de \mathcal{S} é zero, ou seja, todas as subárvores de \mathcal{S} compartilham um nó x . O nível de um nó v é a quantidade de nós do caminho entre x e v . Como todo nó interno é compartilhado por pelo menos duas subárvores da mesma parte, não podemos ter nós internos com nível maior que 3. Sendo assim, todos os nós de nível 4 são folhas. Como o grau máximo de T é 3, a quantidade máxima de folhas nesta árvore é 12. Entretanto, são necessárias no mínimo 16 folhas para construir a representação. Logo, não é possível construir uma representação $(3, 3, 4)$ -ortodoxa para um $K_{4,4}$. \square

3. $K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$

Nesta seção, apresentamos um valor para t tal que existe um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ que pertence à classe $\text{ORTH}[3, 3, t]$. Para simplificar, consideramos que duas subárvores que compartilham uma mesma folha possuem entre si interseção mínima de tamanho t . A Figura 1(a) é uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa (T, \mathcal{S}) de um grafo $G = K_{2,2}$. Considere em G duas partes $\mathcal{L} = \{A, B\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Cada vértice $i \in V(G)$ está associado a uma subárvore $S_i \in \mathcal{S}$. Cada subárvore S_i é gerada pelas folhas que possuem i em seu rótulo, ou seja, é formada pela união destas folhas e os caminhos entre elas. A Figura 1(b) é uma representação $(3, 3, 5)$ -ortodoxa (T, \mathcal{S}) de um grafo $H = K_{4,4}$. Considere em H duas partes $\mathcal{L} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que a representação (T, \mathcal{S}) de H é composta por uma aresta xy , chamada *aresta central*, dois

nós x', x'' adjacentes a x e dois nós y', y'' adjacentes a y . Cada um dos nós x', x'', y' e y'' é raiz da subárvore binária X', X'', Y' e Y'' , respectivamente. Repare que a subárvore X' é exatamente a representação de um $K_{2,2}$ com sua aresta central subdividida pelo nó x' . As demais subárvores X'', Y' e Y'' são construídas de forma análoga. Seguindo este esquema, construímos uma representação $(3, 3, 2n - 3)$ -ortodoxa de um grafo $K_{n,n}$, baseado na representação de $K_{n/2, n/2}$.

Teorema 3. *Seja $n \geq 4$ uma potência de 2. Então existe $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in \text{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$.*

Prova. Sejam $\mathcal{L} = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $\mathcal{N} = \{b_1, \dots, b_n\}$ as partes da bipartição de $K_{n,n}$. Considere \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 dois subconjuntos disjuntos de \mathcal{L} , cada um com $n/2$ vértices, e \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 dois subconjuntos disjuntos de \mathcal{N} , cada um com $n/2$ vértices. Considere uma aresta central xy e quatro nós x', x'', y' e y'' conforme a Figura 1(c). Cada um dos nós x', x'', y' e y'' é raiz da subárvore binária X', X'', Y' e Y'' , respectivamente. Cada uma das subárvores X', X'', Y' e Y'' é uma representação $(3, 3, 2(n/2) - 3)$ -ortodoxa de um $K_{n/2, n/2}$. Como observado na Figura 1(c), em X' as partes do $K_{n/2, n/2}$ são \mathcal{L}_1 e \mathcal{N}_1 , em X'' são \mathcal{L}_1 e \mathcal{N}_2 , em Y' são \mathcal{L}_2 e \mathcal{N}_1 , em Y'' são \mathcal{L}_2 e \mathcal{N}_2 . Na representação (T, \mathcal{S}) do $K_{4,4}$, Figura 1(b), o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é 4. Pela construção da representação (T, \mathcal{S}) de um $K_{n,n}$, temos que o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é definido pela relação de recorrência $I(n) = 2I(n/2) + 4$, para $n > 4$ e potência de 2. Assim, o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é $t = 2n - 4$. Logo, $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ para $t = 2n - 3$. \square

References

- Bornstein, C. F., Coura Pinto, J. W., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. (2017). Constant Threshold Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees. *ArXiv e-prints*.
- Gavril, F. (1974). The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1):47 – 56.
- Golumbic, M. C. and Jamison, R. E. (1985a). Edge and vertex intersection of paths in a tree. *Discrete Mathematics*, 55(2):151 – 159.
- Golumbic, M. C. and Jamison, R. E. (1985b). The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38(1):8 – 22.
- Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., and Stern, M. (2008). Equivalences and the complete hierarchy of intersection graphs of paths in a tree. *Discrete Applied Mathematics*, 156(17):3203 – 3215.
- Jacobson, M., McMorris, F., and Mulder, H. (1991). An introduction to tolerance intersection graphs. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2:705–723.
- Jamison, R. E. and Mulder, H. M. (2000). Tolerance intersection graphs on binary trees with constant tolerance 3. *Discrete Mathematics*, 215(1 - 3):115 – 131.
- Jamison, R. E. and Mulder, H. M. (2005). Constant tolerance intersection graphs of subtrees of a tree. *Discrete Mathematics*, 290(1):27 – 46.
- McMorris, F. R. and Scheinerman, E. R. (1991). Connectivity threshold for random chordal graphs. *Graphs and Combinatorics*, 7(2):177–181.