Grafos Bipartidos Completos em ORTH$[3, 3, t]$

Claudson F. Bornstein[1], **José Wilson C. Pinto**[2,3], **Jayme L. Szwarcfiter**[2,4]

[1]DCC-IM – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[2]PESC-COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[3]Faculdade de Educação Tecnológica do Estado do Rio de Janeiro (FAETERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

[4]Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

cfb@cos.ufrj.br, jwcoura@cos.ufrj.br, jayme@cos.ufrj.br

Abstract. *In this paper, we investigate under what conditions a graph $K_{m,n}$ belongs to the class* $\mathrm{ORTH}[3, 3, t]$ *introduced by [Jamison and Mulder 2000]. We show that $K_{4,4} \notin \mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$, corroborating a conjecture of Jamison and Mulder in [Jamison and Mulder 2005]. The main result of this work is the proof of the existence of a graph $G \subseteq K_{n,n}$ and $G \in \mathrm{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$, if n is a power of* 2 *and* $n \geq 4$.

Resumo. *Neste trabalho, nós investigamos sob quais condições um grafo $K_{m,n}$ pertence à classe* $\mathrm{ORTH}[3, 3, t]$ *introduzida por [Jamison and Mulder 2000]. Mostramos que $K_{4,4} \notin \mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$, corroborando uma conjectura de Jamison e Mulder em [Jamison and Mulder 2005]. O principal resultado deste trabalho é a prova da existência de um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in \mathrm{ORTH}[3, 3, 2n-3]$, se n é uma potência de* 2 *e* $n \geq 4$.

1. Introdução

Uma (h, s, t)-representação de um grafo G [Jamison and Mulder 2000] consiste em representar G como grafo de interseção de subárvores, de grau máximo s, com $s \leq h$, de uma árvore hospedeira T de grau máximo h, tal que dois vértices são adjacentes em G se e somente se as suas subárvores têm interseção de tamanho pelo menos t, ou seja, compartilham no mínimo t nós em T. Denotamos por $[h, s, t]$ a classe de grafos que admitem uma (h, s, t)-representação. Um grafo G é $\mathrm{ORTH}[h, s, t]$ se possui uma (h, s, t)-*representação ortodoxa*. Isto é, uma (h, s, t)-representação de G na qual cada uma das subárvores que representam os vértices de G são tais que suas folhas também são folhas da árvore hospedeira T, e duas subárvore compartilham uma folha se e somente se os vértices correspondentes são adjacentes em G. As classes $[h, s, t]$ e $\mathrm{ORTH}[h, s, t]$ já são estudadas há algum tempo. Os grafos da classe $[\infty, \infty, 1]$ são grafos de interseção de subárvores, e em 1974 Gavril [Gavril 1974] mostrou que esta classe corresponde à família dos grafos cordais. Por outro lado, a classe $[\infty, \infty, 2]$ inclui todos os grafo, uma vez que é possível representar um grafo arbitrário G como um grafo de interseção de subestrelas de uma estrela. A estrela consiste de um

vértice central c e um vértice para cada aresta de $E(G)$. Cada vértice $v \in V(G)$ corresponde a uma estrela de centro c e os vértices correspondentes as arestas que incidem em v [Jacobson et al. 1991, Teorema 2.1]. Em [Jamison and Mulder 2000, Jamison and Mulder 2005], os autores atribuem a [McMorris and Scheinerman 1991] o resultado $[\infty, \infty, 1] = \mathrm{ORTH}[3, 3, 1] = \mathrm{ORTH}[3, 3, 2]$. As classes $[\infty, 2, 1]$ e $[\infty, 2, 2]$ que coincidem, respectivamente, com grafos VPT e grafos EPT foram bastante estudas em [Golumbic and Jamison 1985b, Golumbic and Jamison 1985a]. Golumbic, Lipshteyn, e Stern [Golumbic et al. 2008] estudaram em detalhes as classes $[h, 2, t]$ e $\mathrm{ORTH}[h, 2, t]$, e mostraram que $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, 1] = \mathrm{ORTH}[3, 2, 1] = \mathrm{ORTH}[3, 2, 2]$, e que $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, 1]$ é uma subclasse própria de $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, 2]$. Neste trabalho os autores perguntam se $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, t]$ e $\mathrm{ORTH}[3, 2, t]$ coincidem. Em [Bornstein et al. 2017], foi mostrado que $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, t]$ e $\mathrm{ORTH}[3, 2, t]$ não coincidem e foi exibido um conjunto infinito de grafos que pertencem a $\mathrm{ORTH}[\infty, 2, t]$ e não pertencem a $\mathrm{ORTH}[3, 2, t]$. Em [Jamison and Mulder 2000], os autores estudam detalhadamente as classes $[3, 3, t]$ e $\mathrm{ORTH}[3, 3, t]$. Eles mostram que $[\infty, \infty, 1] = [3, 3, 1] = \mathrm{ORTH}[3, 3, 1] = [3, 3, 2] = \mathrm{ORTH}[3, 3, 2]$. Além disso, a Conjectura 1 é apresentada juntamente com uma questão *Qual o menor valor de t tal que $K_{n,n} \in [3, 3, t]$?* Nosso trabalho exibe na Seção 2 a prova que $K_{4,4} \notin \mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$ que corrobora a Conjectura 1. Na Seção 3 provamos que um grafo $G \subseteq K_{n,n} \in \mathrm{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$ para n potência de 2 maior ou igual a 4.

Conjectura 1. *Para $n \geq 3$, o grafo $K_{n,n}$ tem uma representação $(3, 3, n)$-fiel, mas não tem uma representação $(3, 3, n)$-ortodoxa ou uma representação $(3, 3, t)$, com $t < n$.*

2. $K_{n,n} \notin \mathrm{ORTH}[3, 3, n]$

Nesta seção mostramos que o grafo $K_{4,4}$ não pertence à classe $\mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$, o que reforça a Conjectura 1.

Teorema 2. *O grafo $K_{4,4} \notin \mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$.*

Prova. Considere o grafo $G = K_{4,4}$ com partes $\mathcal{L} = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que $K_{4,4} \in \mathrm{ORTH}[3, 3, 4]$ e que $(T, \mathcal{S})$ seja sua representação. Cada vértice $v \in V(G)$ corresponde a uma subárvore $S_v \in \mathcal{S}$. Considere $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{S}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{S}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de $\mathcal{N}$. Como a representação é ortodoxa a árvore hospedeira T deve possuir, no mínimo, $|\mathcal{L} \times \mathcal{N}| = 16$ folhas. Para facilitar vamos dividir nossa prova em três casos. Caso 1: em $(T, \mathcal{S})$, a distância entre duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, digamos S_1 e S_2, é maior ou igual a 2 (duas arestas). Neste caso, existe um caminho mais curto P entre S_1 e S_2, com $|P| \geq 3$ (nós). Sejam $x = P \cap S_1$, $z = P \cap S_2$ e y um nó de P tal que $y \notin S_1 \cup S_2$. Obrigatoriamente, as quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham todos os nós de P. Assim, $|P| \geq 4$, implica uma interseção proibida entre subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Se $|P| = 3$, como duas subárvores quaisquer de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ não podem compartilhar folhas, , e T possui grau máximo 3, existe um nó $x' \notin P$, que é compartilhado por ao menos duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Então, existem duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ cuja interseção tem tamanho 4, o que não é permitido nesta representação. Caso 2: a distância entre duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, digamos S_1 e S_2, é igual a 1. Considere a aresta xy onde $x \in S_1$ e $y \in S_2$. Obrigatoriamente, as quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham xy. Sejam T_x e T_y subárvores de $T - xy$ com raízes x e y, respectivamente. Duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ não podem compartilhar um nó de nível maior que 2 em T_x ou T_y, caso contrário a interseção entre elas será maior que 3, o que produz

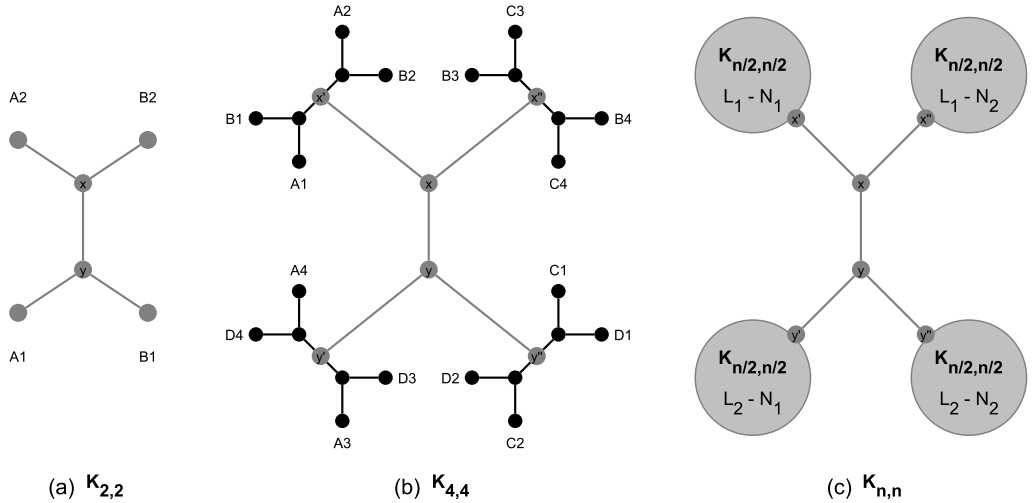

Figure 1. Construção da representação do $\mathrm{K_{n,n}}$ a partir da construção do $\mathrm{K_{n/2,n/2}}$

uma adjacência proibida. Duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ não podem compartilhar um nó de nível maior que 3 em T_x ou T_y, caso contrário existirá interseção de tamanho 4. Em uma representação ortodoxa todos os nós internos de T são compartilhados por pelo menos duas subárvores da mesma parte. Então, todos os nós de nível 4 são folhas. Como já vimos anteriormente, T possui no mínimo 16 folhas. Sendo assim, a subárvore T_x possui 4 nós internos de nível 3, os quais devem ser compartilhados por pares de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Em T_x, as três subárvores S_1, S_3 e S_4 de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, compartilham o nó x, caso contrário a distância até S_2 seria maior que 1. Cada par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ compartilha apenas um nó no nível 3. Como em T_x temos quatro nós de nível 3 e apenas os três pares (S_1S_3), (S_1S_4) e (S_3S_4) não é possível construir esta representação. Caso 3: a distância entre duas subárvores quaisquer de $\mathcal{S}$ é zero, ou seja, todas as subárvores de $\mathcal{S}$ compartilham um nó x. O nível de um nó v é a quantidade de nós do caminho entre x e v. Como todo nó interno é compartilhado por pelo menos duas subárvores da mesma parte, não podemos ter nós internos com nível maior que 3. Sendo assim, todos os nós de nível 4 são folhas. Como o grau máximo de T é 3, a quantidade máxima de folhas nesta árvore é 12. Entretanto, são necessárias no mínimo 16 folhas para construir a representação. Logo, não é possível construir uma representação $(3, 3, 4)$-ortodoxa para um $K_{4,4}$. $\square$

3. $K_{n,n} \in$ ORTH$[3, 3, t]$

Nesta seção, apresentamos um valor para t tal que existe um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ que pertence à classe $\mathrm{ORTH}[3, 3, t]$. Para simplificar, consideramos que duas subárvores que compartilham uma mesma folha possuem entre si interseção mínima de tamanho t. A Figura 1(a) é uma representação $(3, 3, 3)$-ortodoxa $(T, \mathcal{S})$ de um grafo $G = K_{2,2}$. Considere em G duas partes $\mathcal{L} = \{A, B\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Cada vértice $i \in V(G)$ está associado a uma subárvore $S_i \in \mathcal{S}$. Cada subárvore S_i é gerada pelas folhas que possuem i em seu rótulo, ou seja, é formada pela união destas folhas e os caminhos entre elas. A Figura 1(b) é uma representação $(3, 3, 5)$-ortodoxa $(T, \mathcal{S})$ de um grafo $H = K_{4,4}$. Considere em H duas partes $\mathcal{L} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que a representação $(T, \mathcal{S})$ de H é composta por uma aresta xy, chamada *aresta central*, dois

nós x', x'' adjacentes a x e dois nós y', y'' adjacentes a y. Cada um dos nós x', x'', y' e y'' é raiz da subárvore binária X', X'', Y' e Y'', respectivamente. Repare que a subárvore X' é exatamente a representação de um $K_{2,2}$ com sua aresta central subdividida pelo nó x'. As demais subárvores X'', Y' e Y'' são construídas de forma análoga. Seguindo este esquema, construímos uma representação $(3, 3, 2n - 3)$-ortodoxa de um grafo $K_{n,n}$, baseado na representação de $K_{n/2,n/2}$.

Teorema 3. *Seja $n \geq 4$ uma potência de 2. Então existe $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in$* $\mathrm{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$.

Prova. Sejam $\mathcal{L} = \{a_1, ..., a_n\}$ e $\mathcal{N} = \{b_1, ..., b_n\}$ as partes da bipartição de $K_{n,n}$. Considere $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dois subconjuntos disjuntos de $\mathcal{L}$, cada um com $n/2$ vértices, e $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois subconjuntos disjuntos de $\mathcal{N}$, cada um com $n/2$ vértices. Considere uma aresta central xy e quatro nós x', x'', y' e y'' conforme a Figura 1(c). Cada um dos nós x', x'', y' e y'' é raiz da subárvore binária X', X'', Y' e Y'', respectivamente. Cada uma das subárvores X', X'', Y' e Y'' é uma representação $(3, 3, 2(n/2) - 3)$-ortodoxa de um $K_{n/2,n/2}$. Como observado na Figura 1(c), em X' as partes do $K_{n/2,n/2}$ são $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{N}_1$, em X'' são $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{N}_2$, em Y' são $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{N}_1$, em Y'' são $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{N}_2$. Na representação $(T, \mathcal{S})$ do $K_{4,4}$, Figura 1(b), o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é 4. Pela construção da representação $(T, \mathcal{S})$ de um $K_{n,n}$, temos que o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é definido pela relação de recorrência $I(n) = 2I(n/2) + 4$, para $n > 4$ e potência de 2. Assim, o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é $t = 2n - 4$. Logo, $G \subseteq K_{n,n}$ e $G \in \mathrm{ORTH}[3, 3, t]$ para $t = 2n - 3$. $\square$

References

Bornstein, C. F., Coura Pinto, J. W., Rautenbach, D., and Szwarcfiter, J. L. (2017). Constant Threshold Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees. *ArXiv e-prints*.

Gavril, F. (1974). The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1):47 – 56.

Golumbic, M. C. and Jamison, R. E. (1985a). Edge and vertex intersection of paths in a tree. *Discrete Mathematics*, 55(2):151 – 159.

Golumbic, M. C. and Jamison, R. E. (1985b). The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38(1):8 – 22.

Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., and Stern, M. (2008). Equivalences and the complete hierarchy of intersection graphs of paths in a tree. *Discrete Applied Mathematics*, 156(17):3203 – 3215.

Jacobson, M., McMorris, F., and Mulder, H. (1991). An introduction to tolerance intersection graphs. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2:705–723.

Jamison, R. E. and Mulder, H. M. (2000). Tolerance intersection graphs on binary trees with constant tolerance 3. *Discrete Mathematics*, 215(1 - 3):115 – 131.

Jamison, R. E. and Mulder, H. M. (2005). Constant tolerance intersection graphs of subtrees of a tree. *Discrete Mathematics*, 290(1):27 – 46.

McMorris, F. R. and Scheinerman, E. R. (1991). Connectivity threshold for random chordal graphs. *Graphs and Combinatorics*, 7(2):177–181.