Sobre as funções racionais multi-sequenciais

Rodrigo de Souza[1*]

[1]Departamento de Computação – Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

rodrigo.npmsouza@ufrpe.br

Abstract. *Multi-sequential functions were introduced by Choffrut and Schützenberger as the family of rational functions whose graph is a finite union of sequential functions. Recently, Jeckert and Filiot have shown that it is decidable in polynomial time if a rational function is multi-sequential. In this communication we study the rational functions that are a union of k sequential functions, for a fixed integer k. We present three characterizations of these functions, which are related to classical results of the theory of rational relations.*

Resumo. *Funções multi-sequenciais foram introduzidas por Choffrut e Schützenberger como a família das funções racionais cujo gráfico é uma união finita de funções sequenciais. Recentemente, Jeckert e Filiot mostraram que é decidível em tempo polinomial se uma função racional é multi-sequencial. Nesta comunicação estudamos as funções que são uma união de k funções sequenciais, para um inteiro fixo k. Apresentamos três caracterizações dessas funções, que recordam resultados clássicos sobre as relações racionais.*

1. Introdução

A elucidação da estrutura de famílias de objetos realizados por autômatos – linguagens, séries, relações – decompondo-os em objetos mais elementares é uma das linhas de estudo mais tradicionais na área da Teoria dos Autômatos. Por exemplo, no tratado clássico de Samuel Eilenberg [Eilenberg 1974], um capítulo é dedicado à *estrutura dos conjuntos reconhecíveis*, e um algoritmo de decomposição dessas linguagens é apresentado.

Nossa contribuição filia-se a essa linha ao considerar a estrutura das funções entre palavras realizadas por autômatos com entrada e saída – os transdutores. Um *transdutor*[1] é uma extensão do modelo de autômato, no qual as transições são rotuladas por um par de palavras, uma dita *de entrada* e outra *de saída*. Ao invés de reconhecer linguagens, os transdutores realizam relações entre monóides livres A^* e B^*; essas relações são precisamente as *relações racionais* de A^* a B^* (= subconjuntos do produto cartesiano $A^* \times B^*$ que podem ser obtidos com aplicações das operações de união, produto e estrela a partir de unitários). Uma *função racional* é uma relação racional que é uma função parcial.[2]

Em diversos aspectos, relações racionais são objetos muito mais intrincados do que as linguagens reconhecíveis.[3] Por outro lado, as funções racionais, que estudamos aqui, exibem propriedades notáveis e por isso ganharam muita atenção na literatura.

---

[*]Este trabalho é apoiado pelo projeto *Problemas estruturais em modelos formais de Computação*, Edital MCTI/CNPQ/Universal 14/2014 (Processo 459957/2014-7).

[1]Por limitação de espaço, não apresentamos neste resumo definições e notações básicas sobre autômatos e transdutores. Esse material pode ser consultado no livro de Jacques Sakarovitch [Sakarovitch 2009].

[2]Ao longo do texto, A e B aparecerão livremente e representam dois alfabetos.

[3]Por exemplo, a equivalência não é decidível para relações racionais.

O problema abordado nesta comunicação refere-se ao conceito de determinismo em transdutores. Contrariamente aos autômatos sobre um monóide livre, nem todo transdutor funcional (= realiza uma função) pode ser determinizado. A caracterização das funções racionais que podem ser realizadas por um *transdutor sequencial*, ou seja, determinístico na entrada – são as chamadas *funções sequenciais* – é um resultado profundo, obtido por Choffrut em 1979 [Choffrut 1979, Lombardy and Sakarovitch 2006].

Em 1986, Choffrut e Schützenberger consideraram um relaxamento da sequencialidade: mesmo que uma função racional não seja sequencial, pode-se escrevê-la como uma união finita de funções sequenciais? Chamamos de *multi-sequencial* uma tal função.[4] O principal resultado apresentado em [Choffrut and Schützenberger 1986] é uma caracterização estrutural dos transdutores que realizam uma função multi-sequencial. Os problemas de decidir se uma função racional é multi-sequencial e de decompor uma tal função em uma união de funções sequenciais foram considerados por Jecker e Filiot [Jecker and Filiot 2015], com um algoritmo polinomial para o primeiro problema.

Nesta comunicação, consideramos uma versão parametrizada, por um inteiro $k > 0$, da questão introduzida por Choffrut e Schützenberger: que funções racionais podem ser escritas como uma união de k funções sequenciais? Chamamos tais funções de *k-sequenciais*. A semelhança com os resultados mencionados é apenas aparente: os trabalhos de Choffrut, Schützenberger, Jeckert e Filiot tratam de investigar a existência de uma decomposição; aqui, deseja-se uma resposta mais refinada, ao fixar-se um tamanho para a decomposição. Essa diferença pode surpreendentemente ser posta em paralelo com dois problemas de decisão clássicos para transdutores: *decidir se um transdutor é k-valorado, para um dado inteiro k* (ou seja, se a imagem de toda palavra no domínio é um conjunto de no máximo k palavras); *decidir se é finitamente valorado* (se existe um tal k). Ambos os problemas podem ser decididos em complexidade polinomial, o que demonstramos com J. Sakarovitch através de construções estruturais com transdutores [Sakarovitch and de Souza 2008]. Mas as construções empregadas são muito diferentes.

Nossa contribuição consiste de três caracterizações das funções k-sequenciais, que referem-se a facetas distintas desses objetos. Cada uma relaciona-se com um resultado clássico sobre transdutores: a primeira, Teorema 3.1, recorda a supracitada caracterização, de sabor topológico, de Choffrut das funções sequenciais (Teorema 2.1); a segunda, Teorema 3.2, também faz referência ao trabalho de Choffrut (Teorema 2.2), mas é mais estrutural, ao lidar com propriedades de passeios em transdutores; finalmente, a terceira, Teorema 3.3, evoca uma propriedade de passeios de transdutores k-valorados implícita em [Weber 1996] e retrabalhada em [Sakarovitch and de Souza 2010] (Teorema 2.3). Por restrições de espaço, limitamo-nos a expor, com um mínimo de notação, os enunciados dos três resultados clássicos referidos, e, em seguida, enunciar nossos resultados. Concluímos com um comentário sobre consequências dos mesmos a serem investigadas.

2. Funções sequenciais e relações k-valoradas: propriedades clássicas

A principal notação envolvida nos resultados que vamos expor é uma métrica sobre um monóide livre; essa função associa a todo par de palavras $u, v \in A^*$ a soma dos comprimentos dos sufixos respectivos após retirar-se o maior prefixo comum entre u e v.

[4] A função que associa toda palavra da forma $u_1x_1\#u_2x_2\#\ldots u_kx_k\#$ a $x_1u_1\#x_2u_2\#\ldots x_ku_k\#$, onde, para todo i, $u_i \in \{a,b\}^*$ e $x_i \in \{a,b\}$, é um exemplo de função racional que não é multi-sequencial.

Podemos definir essa métrica formalmente com o *grupo livre* sobre A: $||u,\, v|| = |u^{-1}v|$.

Definição 2.1 (Função lipschitziana) *Uma função $f : A^* \to B^*$ é* lipschitziana *se existe um inteiro $L \geq 0$ tal que, para todo u e v no domínio de f, $||uf,\, vf|| \leq L||u,\, v||$.*

Não é difícil demonstrar que toda função sequencial é lipschitziana. A substância da caracterização de Choffrut é a recíproca, cuja demonstração é intrincada:

Teorema 2.1 (Choffrut 1978) *Uma função racional é sequencial sse é lipschitziana.*

Uma caracterização mais estrutural e efetiva das funções sequenciais, também presente no trabalho de Choffrut, pode ser expressa através de propriedades do produto cartesiano de um transdutor $\mathcal{T}$ por ele mesmo: em $\mathcal{T}^2$, um passeio representa simultaneamente dois passeios de $\mathcal{T}$ com a mesma entrada, em $\mathcal{T}^3$, três passeios, etc. Veja detalhes desse produto em [Sakarovitch and de Souza 2010]. Precisamos da seguinte definição:

Definição 2.2 (Passeio (i, j)-conjugado) *Seja c um passeio de $\mathcal{T}^{k+1}$ de um estado inicial $(p_1, p_2, \ldots, p_{k+1})$ ao estado $(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1})$; sejam $p_i \xrightarrow{u|u_1} q_i$ e $p_j \xrightarrow{u|u_2} q_j$ as projeções de c nos índices i e j, respectivamente. Dizemos que c é (i, j)-*conjugado *se, para todo circuito d que começa e termina em $(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1})$, as projeções de d nos índices i e j, $q_i \xrightarrow{v|v_1} q_i$ e $q_j \xrightarrow{v|v_2} q_j$, satisfazem $u_1^{-1}u_2 = v_1^{-1}u_1^{-1}u_2v_2$.*

A caracterização estrutural de Choffrut é a base de algoritmos para decidir se uma função racional é sequencial (detalhes podem ser vistos em [Béal et al. 2003]):

Teorema 2.2 (Choffrut 1978) *Um transdutor funcional $\mathcal{T}$ realiza uma função sequencial sse todo passeio de $\mathcal{T}^2$ que começa em um estado inicial é $(1, 2)$-conjugado.*

Relativamente às relações racionais k-valoradas, a propriedade que nos interessa envolve o conceito de deslocamento entre passeios c e d com a mesma entrada e que começam em um estado inicial: considerando-se todos os prefixos de c e d de mesmo comprimento, o deslocamento é o máximo entre as diferenças das saídas desses prefixos.

Definição 2.3 (Deslocamento) *Em um transdutor $\mathcal{T}$, o* deslocamento *entre passeios c e d com a mesma entrada, e que começam em um estado inicial, é o inteiro $\langle c,\, d\rangle = \max\left\{ ||x,\, y|| \;\middle|\; p \xrightarrow{u|x} q \text{ prefixo de } c,\; r \xrightarrow{u|y} s \text{ prefixo de } d \right\}$.*

Se um transdutor $\mathcal{T}$ é k-valorado, não somente toda tupla de $k + 1$ passeios bem-sucedidos com a mesma entrada tem pelo menos um par com a mesma saída (isso é uma paráfrase da definição), mas necessariamente existe um par cujo deslocamento é limitado:

Teorema 2.3 (Weber 1996) *Um transdutor $\mathcal{T}$ é k-valorado se, e somente se, existe um inteiro L tal que, para todo passeio bem-sucedido c de $\mathcal{T}^{k+1}$, existem duas coordenadas i e j tais que as projeções c_i et c_j tem a mesma saída e satisfazem $\langle c_i,\, c_j\rangle < L$.*

3. Contribuições

Teorema 3.1 *Uma função racional $f : A^* \to B^*$ é k-sequencial se, e somente se, existe um inteiro L tal que todo conjunto $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ de palavras no domínio de f admite índices i e j tais que $||u_if,\, u_jf|| \leq L||u_i,\, u_j||$.*

Teorema 3.2 *Um transdutor funcional $\mathcal{T}$ realiza uma função k-sequencial se, e somente se, todo passeio c de $\mathcal{T}^{k+1}$, que começa em um estado inicial, satisfaz: para todo prefixo c' de c, existe pelo menos um par i, j de índices tais que c' é (i, j)-conjugado.*

Teorema 3.3 *Um transdutor funcional $\mathcal{T}$ realiza uma função k-sequencial se, e somente se, existe um inteiro L tal que, para todo passeio c de $\mathcal{T}^{k+1}$ que começa em um estado inicial, existem coordenadas i e j tais que as projeções c_i e c_j satisfazem $\langle c_i,\, c_j \rangle < L$.*

4. Comentários

As demonstrações dos teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 são relacionadas. Por exemplo, no Teorema 3.2, a existência de um passeio que não satisfaz as condições enunciadas permite a construção de um conjunto de palavras que não satisfaz as condições do Teorema 3.1; a existência de um passeio que não satisfaz as condições do Teorema 3.3 permite construir um passeio que não satisfaz as condições do Teorema 3.2.

A sequência natural de nossos resultados é a investigação de um algoritmo para decidir se uma função é k-sequencial com base no Teorema 3.2 e de uma decomposição de uma função k-sequencial em k transdutores sequenciais partindo do Teorema 3.3.

Por fim, agradecemos aos revisores anônimos pela leitura cuidadosa da versão preliminar deste texto, que nos permitiu melhorá-lo substancialmente.

Referências

Béal, M. P., Carton, O., Prieur, C., and Sakarovitch, J. (2003). Squaring transducers: an efficient procedure for deciding functionality and sequentiality. *Theoretical Computer Science*, 292(1):45–63.

Choffrut, C. (1979). A generalization of Ginsburg and Rose's characterization of gsm mappings. In *ICALP'79*, volume 71 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 88–103. Springer-Verlag.

Choffrut, C. and Schützenberger, M. P. (1986). Décomposition de fonctions rationnelles. In *STACS 86*, volume 210 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 213–226. Springer.

Eilenberg, S. (1974). *Automata, Languages, and Machines*. Academic Press, Inc.

Jecker, I. and Filiot, E. (2015). Multi-sequential word relations. In *DLT 2015*, volume 9168 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 288–299. Springer.

Lombardy, S. and Sakarovitch, J. (2006). Sequential? *Theoretical Computer Science*, 356(1-2):224–244.

Sakarovitch, J. (2009). *Elements of Automata Theory*. Cambridge University Press.

Sakarovitch, J. and de Souza, R. (2008). On the decidability of bounded valuedness for transducers. In *MFCS 2008*, volume 5162 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 588–600. Springer.

Sakarovitch, J. and de Souza, R. (2010). Lexicographic decomposition of k-valued transducers. *Theory of Computing Systems*, 47(3):758–785.

Weber, A. (1996). Decomposing A *k*-valued transducer into *k* unambiguous ones. *ITA*, 30(5):379–413.