Um algoritmo exato para biclique-coloração

Guilherme de C. M. Gomes, Vinicius Fernandes dos Santos

[1]Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais

Resumo. *O número biclique-cromático $\chi_{\mathcal{B}}(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor inteiro k tal que existe uma k-coloração dos vertices de G com a propriedade de que nenhuma biclique maximal de G seja monocromática. Trabalhos recentes provaram que o problema de se computar $\chi_{\mathcal{B}}(G)$ para um grafo G é Σ_2^p-completo para qualquer $k \geq 2$. Nosso principal resultado neste trabalho é um algoritmo baseado em inclusão-exclusão de complexidade $O^*(2^n)$ para se computar $\chi_{\mathcal{B}}(G)$ de forma exata.*

1. Introdução

Problemas de coloração são alguns dos mais estudados em teoria dos grafos. Em sua versão clássica, o problema da k-coloração pergunta se existe uma atribuição de k cores aos vértices de um grafo de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Ao longo dos anos, variações do problema foram propostas, sendo uma delas a k-clique-coloração, onde se procura uma atribuição de cores aos vértices do grafo tal que nenhuma clique maximal do mesmo seja monocromática. De forma similar, uma k-biclique-coloração busca uma atribuição de cores aos vértices do grafo tal que nenhuma biclique maximal seja monocromática.

Em termos de cliques, um trabalho recente [7] demonstrou que k-clique-coloração é Σ_2^p-completo, enquanto [2] propôs um algoritmo $O^*(2^n)$ para se computar de forma exata o número clique cromático $\chi_{\mathcal{C}}(G)$. Já em termos de bicliques, [4] apresenta uma prova de que k-biclique-coloração também é Σ_2^p-completo para grafos gerais, além de mostrar a NP-completude do problema para diversas classes de grafos. Apesar disso, em [6] são apresentados algoritmos polinomiais para esses problemas quando o domínio é restrito aos grafos livres de unicordas.

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados inspirados em [2] que possibilitam a construção de um algoritmo $O^*(2^n)$ para o problema da k-biclique-coloração. Nele, fazemos uso do algoritmo baseado em inclusão-exclusão proposto em [1] para o problema da cobertura exata e mostramos a equivalência entre uma solução do mesmo e uma k-biclique-coloração válida.

2. Definições e Notações

Ao longo deste trabalho, denotamos um grafo por $G = (V, E)$, com V e E seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente, e $n = |V|$ e $m = |E|$. Para cada $X \subseteq V(G)$, dizemos que $G[X] = (X, E_X)$ é um *subgrafo induzido de* G se $E_X = \{uv \mid u, v \in X, uv \in E\}$. O *complemento* $\overline{G} = (V, \overline{E})$ de G é tal que $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E\}$.

Um grafo K_n é dito ser *completo* se seus vértices são dois a dois adjacentes; I_n é um *conjunto independente* se seu complemento é isomorfo a K_n. G é *bipartido* se podemos construir uma bipartição $V = (L, R)$ tal que $G[L]$ e $G[R]$ são conjuntos independentes. $K_{m,n}$ é *bipartido completo* se todo $u \in L$ é adjacente a todo $v \in R$.

Um subconjunto $X \subseteq V$ é uma *biclique* de G se $G[X]$ for isomorfo a $K_{m,n}$. X é maximal se não existe um vértice $u \in V \setminus X$ tal que $X \cup \{u\}$ é uma biclique. Denotamos por $\mathcal{B}(G)$ a família de todas as bicliques maximais de G.

Uma k-*coloração* de uma grafo é uma função $\varphi : V \to \{1, \ldots, k\}$ que atribui a cada vértice de G uma cor única. Para simplificar a notação, definimos $\varphi(V) = \bigcup_{u \in V} \{\varphi(u)\}$. Um subgrafo $G[X]$ é monocromático se $|\varphi(X)| = 1$.

Uma k-vértice-coloração é uma k-coloração onde vértices adjacentes de G apresentam cores diferentes. De maneira similar, uma k-biclique-coloração é uma k-coloração onde nenhuma biclique maximal é monocromática. Note que uma k-coloração é uma partição $P_k = (V_1, \ldots, V_k)$ dos vértices de G em *classes de cores*, onde $|\varphi(V_i)| = 1$. Usando essa observação, temos que nenhuma biclique maximal de G pode estar inteiramente contida em uma classe de cor. O número biclique cromático $\chi_{\mathcal{B}}(G)$ é o menor inteiro k tal que existe uma k-biclique-coloração própria de G.

Um *hipergrafo* $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots H_q\}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto finito V, com cada $H_i \in \mathcal{H}$ sendo uma *hiperaresta*. Denotamos por $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$ o hipergrafo com conjunto de hiperarestas igual à família de bicliques maximais de G.

Um subconjunto $X \subseteq V$ *atinge* uma hiperaresta $H_i \in \mathcal{H}$ se $X \cap H_i \neq \emptyset$. X é um *transversal* de $\mathcal{H}$ se ele atinge todas suas hiperarestas. De forma análoga, um *oblíquo* de $\mathcal{H}$ é um subconjunto de V tal que existe pelo menos uma hiperaresta não tocada por ele. Denotamos por $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a família de todos os transversais de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ e por $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ a de todos os seus oblíquos. $\mathcal{T}^*_{\mathcal{B}} = \left\{X \mid \overline{X} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}\right\}$ é a família dos complementos de transversais de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. Note que $X \subseteq V$ é um transversal se e somente se ele não é um oblíquo.

O problema da cobertura exata é definido como: dados um conjunto base V, uma família $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ e um inteiro k, existe alguma k-partição de V usando elementos de $\mathcal{F}$? O teorema abaixo, mostrado em [1], nos dá um algoritmo $O(2^n \text{polylog}(n))$ para a solução deste problema. Dizemos que um algoritmo é $O^*(2^n)$ se sua complexidade é da forma $O(2^n \text{polylog}(n))$.

Teorema 1 ([1])**.** *Existe um algoritmo $O^*(2^n)$ para o problema da cobertura exata.*

3. Computando $\chi_{\mathcal{B}}(G)$

Trabalhos recentes fazem uso do princípio de inclusão-exclusão para resolver uma série de problemas clássicos da literatura, como cobertura exata [1] e k-vértice-coloração [5], além de problemas menos estudados, como k-clique-coloração [2]. Uma abordagem natural para se construir uma solução exponencial é a transformação do problema em questão para algum outro cuja complexidade seja inferior. Neste âmbito, em [2] foi apresentado um algoritmo $O^*(2^n)$ para a k-clique-coloração transformando uma instância do mesmo para uma de cobertura exata sem prejudicar a complexidade final da solução.

Tomando como base os resultados de [2], neste artigo demonstramos como construir um algoritmo $O^*(2^n)$ para o problema da k-clique-coloração, transformando-o em uma instância de cobertura exata. De forma natural, buscaremos cobrir V e, para isso, a escolha de $\mathcal{F}$ deve ser feita de forma a impedir que qualquer cobertura válida possa gerar uma coloração imprópria. A escolha dessa família é discutida abaixo.

Nosso primeiro resultado traduz a ideia de que, fixada uma cor i, *toda* biclique maximal deve possuir pelo menos uma cor diferente de i.

Lema 1. *$P_k = (V_1, \ldots, V_k)$ é uma k-biclique-coloração de G se e somente se P_k é uma k-partição de G e, $\forall\, V_i \in P_k$, $\overline{V_i}$ é um transversal de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja P_k uma k-biclique-coloração de G e suponha que existe algum V_i tal que $\overline{V_i} \notin \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Isso, por sua vez, implica que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap \overline{V_i} = \emptyset$, ou seja $B \subseteq V_i$, donde $|\varphi(B)| = 1$, que é uma contradição, pois P_k é uma coloração própria.

($\Leftarrow$) Seja P_k uma k-partição de G com $\overline{V_i} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ e suponha que P_k não é uma k-biclique-coloração. Ou seja, existe uma biclique maximal $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V_i$ para algum i. Isto implica que $B \cap \overline{V_i} = \emptyset$, e, portanto, $\overline{V_i} \notin \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, o que contradiz a hipótese. □

O Lema 1 nos dá uma família natural para se usar durante o procedimento de cobertura: a família $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^*$ dos complementos de transversais de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. Computar diretamente transversais, por sua vez, é custoso, uma vez que a família de bicliques maximais pode ser da ordem de $O(n \cdot 3^{n/3})$, como demonstrado em [3]. Para enumerar $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^*$, observe que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = 2^V \setminus \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$. Ou seja, se conseguirmos descobrir $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ de forma mais eficiente, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^*$ pode ser construída em tempo $O^*(2^n)$. Nosso próximo resultado garante que tal descoberta é possível.

Lema 2. *Os oblíquos maximais de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$ são exatamente os complementos das bicliques maximais de G.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $X \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ um oblíquo maximal de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$. Pela definição, existe alguma $B \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ tal que $X \cap B = \emptyset$, o que implica que $X \subseteq \overline{B}$. Para mostrar que apenas a igualdade é válida, assumimos que $X \subset \overline{B}$. Sendo assim, existe $Y \subseteq \overline{B} \setminus X$, $Y \cap B = \emptyset$, $(X \cup Y) \cap B = \emptyset$ e $X \cup Y \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$. Isso por sua vez implica que X não é maximal, uma contradição.

($\Leftarrow$) Seja $B \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$ uma biclique maximal de G e $X = \overline{B}$. Por hipótese, $X \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$. Suponha que X não é um oblíquo maximal de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$. Sendo assim, existe um $Y \subseteq V \setminus X$ tal que $Z = X \cup Y$ é um oblíquo maximal, pois $X \subset Z$ é oblíquo e, por hipótese, não é maximal. Então: *(i)* $\overline{B} \cap Y = \emptyset$; *(ii)* $Y \subseteq B$; *(iii)* $Z \cap B \neq \emptyset$ e, portanto, $Z \notin \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, que é um absurdo. □

Corolário 1. *Dado um grafo $G = (V, E)$ e um subconjunto $X \subseteq V$, existe um algoritmo $O(n(n - |X|))$ para determinar se X é um oblíquo maximal de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$.*

Com os resultados acima, podemos testar para cada $X \in 2^V$ se seu complemento é uma biclique maximal. Após construirmos os oblíquos maximais de $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, podemos usar o lema abaixo (apresentado em [2]) para construir $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, que é exatamente a família de subconjuntos de todos os oblíquos maximais.

Lema 3 ([2])**.** *O fecho descendente $\mathcal{F}_{\downarrow} = \{X \subseteq V \mid \exists Y \in \mathcal{F},\ X \subseteq Y\}$ de qualquer família $\mathcal{F}$ pode ser enumerado em $O^*(|\mathcal{F}_{\downarrow}|)$.*

Tendo como base os resultados até então apresentados, podemos construir um algoritmo $O^*(2^n)$ para o problema da k-biclique-coloração.

Teorema 2. *Existe um algoritmo $O^*(2^n)$ para se computar $\chi_{\mathcal{B}}(G)$.*

Demonstração. Usando o Lema 1, para qualquer k-biclique-coloração $(V_1, \ldots, V_k)$ válida, cada classe de cor deve ser o complemento de algum transversal do hipergrafo biclique $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(G)$. Para enumerar $\mathcal{T}^*_{\mathcal{B}}$, primeiramente utilizamos os Lemas 2, 3 e o Corolário 1 para computar $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ em tempo $O^*(2^n)$. Em seguida, computamos $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = 2^V \setminus \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ verificando para cada elemento de 2^V se ele está em $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$. Em seguida, complementamos cada elemento de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, obtendo $\mathcal{T}^*_{\mathcal{B}}$.

Agora, para encontrarmos $\chi_{\mathcal{B}}(G)$, executamos para cada elemento $k \in \{1, \ldots, n\}$ o algoritmo $O^*(2^n)$ para cobertura exata (Teorema 1), tendo V como conjunto base, $\mathcal{T}^*_{\mathcal{B}}$ como família a ser usada na partição e k o tamanho da mesma. O primeiro k que apresentar pelo menos uma partição válida será $\chi_{\mathcal{B}}(G)$. □

4. Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho estendemos naturalmente os resultados referentes ao problema da k-clique-coloração para o problema da k-biclique-coloração, explorando as noções de transversais e oblíquos do hipergrafo biclique e mostrando como ambos podem ser utilizados na construção de um algoritmo $O^*(2^n)$ para se computar $\chi_{\mathcal{B}}(G)$. Trabalhos futuros incluem a investigação de parametrizações deste problema que explorem as relações entre colorações, estruturas maximais e hipergrafos, além de algoritmos $O^*(\alpha^n)$ com $\alpha < 2$ para a computação do número biclique cromático de um grafo.

Referências

[1] Björklund, A., Husfeldt, T., Koivisto, M.: Set partitioning via inclusion-exclusion. SIAM Journal on Computing 39(2), 546–563 (2009)

[2] Cochefert, M., Kratsch, D.: Exact algorithms to clique-colour graphs. In: International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics. pp. 187–198. Springer (2014)

[3] Gaspers, S.: Exponential Time Algorithms. Serge Gaspers (2010)

[4] Groshaus, M., Soulignac, F.J., Terlisky, P.: Star and biclique coloring and choosability. Journal of Graph Algorithms and Applications 18(3), 347–383 (2014)

[5] Koivisto, M.: An o*(2ˆ n) algorithm for graph coloring and other partitioning problems via inclusion–exclusion. In: Foundations of Computer Science, 2006. FOCS'06. 47th Annual IEEE Symposium on. pp. 583–590. IEEE (2006)

[6] Macêdo Filho, H., Machado, R., de Figueiredo, C.: Efficient algorithms for clique-colouring and biclique-colouring unichord-free graphs. Algorithmica pp. 1–29 (2016)

[7] Marx, D.: Complexity of clique coloring and related problems. Theoretical Computer Science 412(29), 3487–3500 (2011)