Coloração arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano

Aleffer Rocha[1], **Sheila Morais Almeida**[1]

[1]Departamento Acadêmico de Informática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
CEP 84.016-210 – Ponta Grossa – PR – Brasil

aleffer@alunos.utfpr.edu.br, sheilaalmeida@utfpr.edu.br

Abstract. *The rainbow connection number of a connected graph G, denoted by $rc(G)$, is the minimum number of colors needed to color the edges of G, so that every pair of vertices is connected by at least one path in which the colors of the edges are pairwise distinct. In this work we determine the rainbow connection number for the graphs $C_m \times P_n$ when m is odd and $C_m \times C_n$ when m and n have distinct parities. For the case in which n and m are odd, we prove that $rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m+n}{2}$.*

Resumo. *O número de conexão arco-íris de um grafo conexo G, denotado por $rc(G)$, é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas de G, de forma que entre qualquer par de vértices exista um caminho cujas cores das arestas são duas a duas distintas. Neste trabalho determinamos o número de conexão arco-íris para os grafos $C_m \times P_n$ quando m é ímpar e $C_m \times C_n$ quando m e n têm paridades distintas. Para os casos em que m e n são ímpares, provamos que $rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m+n}{2}$.*

1. Introdução

Neste trabalho, todo grafo $G = (V(G), E(G))$ é simples, conexo e tem pelo menos uma aresta. Uma atribuição de cores para as arestas de G, geralmente dada por uma função $c : E(G) \to \mathbb{N}$, é uma *coloração arco-íris* se entre qualquer par de vértices existe um caminho cujas cores das arestas são duas a duas distintas [Chartrand et al. 2008]. Caminhos que não possuem duas ou mais arestas com a mesma cor são chamados de *caminhos multicoloridos*.

O *número de conexão arco-íris*, $rc(G)$, é menor inteiro para o qual existe uma coloração arco-íris de um grafo G. O *Problema da Coloração Arco-Íris* é determinar $rc(G)$ para um dado grafo G. Em algumas classes de grafos, o número de conexão arco-íris é trivial, por exemplo, para uma árvore T com n vértices $rc(T) = n-1$; para um grafo completo K_n, $rc(K_n) = 1$; e para um ciclo C_n, $rc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ [Chartrand et al. 2008]. Para obter uma coloração arco-íris de qualquer grafo simples e conexo G, é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma de suas árvores geradoras, o que implica $rc(G) \leq |V(G)| - 1$. Observa-se que tal limite superior é justo. Em [Li et al. 2012], os autores provaram que se G é 2-vértice-conexo, então $rc(G) \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil$. Para um grafo G conexo com n vértices e grau mínimo $\delta(G)$, $rc(G) \leq \frac{3n}{\delta(G)+1} + 3$ [Chandran et al. 2012].

Em um grafo G, a *distância* entre dois vértices u e v é o tamanho do menor caminho entre u e v, dado pelo número de arestas deste caminho. A *excentricidade* $\epsilon(v)$

de um vértice $v \in V(G)$ é a maior distância entre v e qualquer outro vértice de G. O *diâmetro* de um grafo G, denotado por $diam(G)$ é a excentricidade máxima de G. Apesar de alguns resultados conhecidos e de limites superiores justos para o número de conexão arco-íris, sabe-se que quando G é um grafo com diâmetro 2, decidir se $rc(G) = 2$ é um problema NP-completo e que determinar o número de conexão arco-íris de um grafo G qualquer é um problema NP-difícil [Chakraborty et al. 2011].

Sejam G e H dois grafos simples e conexos com $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ e $V(H) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. O *produto cartesiano* $G \times H$ tem conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e a aresta $(v_i, u_j)(v_k, u_l)$ existe se, e somente se, $v_i v_k \in E(G)$ e $u_j = u_l$ ou $u_j u_l \in E(H)$ e $v_i = v_k$, $0 \leq i, k < m$ e $0 \leq j, l < n$. Li, Shi e Sun [Li et al. 2013] apresentaram alguns resultados sobre o número de conexão arco-íris em grafos resultantes de produtos cartesianos, como o importante Teorema 1, a seguir.

Teorema 1. *[Li et al. 2013] Seja $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_k$, $k \geq 2$, tal que G_i é conexo, $1 \leq i \leq k$. Então $rc(G) \leq \sum_{i=1}^{k} rc(G_i)$. Além disso, se $diam(G_i) = rc(G_i)$ para todo G_i, $1 \leq i \leq k$, então a igualdade vale.*

Dos resultados para árvores e ciclos [Chartrand et al. 2008] e do Teorema 1, pode-se inferir que $rc(P_m \times P_n) = m+n-2$, para dois caminhos P_m e P_n, $2 \leq m \leq n$; $rc(C_m \times C_n) = \frac{m+n}{2}$ para dois ciclos C_m e C_n, m e n pares, $3 < m \leq n$; e $rc(C_m \times P_n) = n-1+\frac{m}{2}$ para um caminho P_n e um ciclo C_m, m par. Quando $m \neq 3$ é impar, $diam(C_m) < rc(C_m)$ e, portanto, o número de conexão arco-íris do produto cartesiano é um problema em aberto. A contribuição deste trabalho é a determinação de $rc(C_m \times P_n)$ quando m é ímpar e $rc(C_m \times C_n)$ quando m e n têm paridades distintas. Também provamos que $rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m+n}{2}$ se m e n são ímpares, melhorando o limite apresentado no Teorema 1. O novo limite tem diferença de no máximo uma unidade do ótimo. As provas apresentadas implicam em algoritmos polinomiais para coloração arco-íris.

2. Resultados

Nesta seção, primeiro será apresentada a prova de que $rc(C_m \times P_n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$ quando m é ímpar. É importante observar que os grafos $C_m \times P_n$ e $P_n \times C_m$ são isomorfos. As provas fazem uso de um conhecido resultado segundo o qual qualquer grafo conexo G tem $rc(G) \geq diam(G)$ [Chartrand et al. 2008]. Em seguida, determinamos $rc(C_m \times C_n)$ quando $m = n = 3$ e quando m e n têm paridades distintas. No caso em que m e n são ambos ímpares, sabe-se que $rc(C_m \times C_n) \geq diam(C_m \times C_n) = \frac{m+n}{2} - 1$. Neste caso, apresentamos uma coloração arco-íris com $\frac{m+n}{2}$ cores.

Teorema 2. *Se $C_m \times P_n$ tem m ímpar e $n \geq 2$, então $rc(C_m \times P_n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$.*

Demonstração. Seja $C_m \times P_n$, tal que m é ímpar, $n \geq 2$, $V(C_m) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ e $V(P_n) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Note que $diam(C_m \times P_n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$. Então, como $rc(C_m \times P_n) \geq diam(C_m \times P_n)$, é suficiente apresentar uma coloração arco-íris com $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$ cores.

Suponha $n = 2$. Sejam $C_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \ldots (v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$, $j \in \{0, 1\}$, e $P_i = (v_i, u_0)(v_i, u_1)$, $0 \leq i < m$. Em cada ciclo C_j, $j \in \{0, 1\}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor i, $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$; pinte $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor $i - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$,

$\lceil \frac{m}{2} \rceil \leq i < m-1$; e pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_{m-1})$ com cor $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$. Para cada caminho P_i, se $0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ com cor $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; e se $\lceil \frac{m}{2} \rceil \leq i < m$, pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ com cor $i - \lceil \frac{m}{2} \rceil$.

Vamos mostrar que existe um caminho multicolorido entre cada par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l), $0 \leq i, k < m$ e $0 \leq j, l \leq 1$. Se $j = l$, então o caminho multicolorido é o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) no ciclo C_j. Então, suponha $j \neq l$ e, sem perda de generalidade, seja $j = 0$ e $l = 1$. Considere as operações aritméticas módulo m. Seja P' o menor caminho de (v_i, u_0) a (v_k, u_0). Se $(v_{i-1}, u_0) \in P'$, então $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ concatenado ao menor caminho de (v_i, u_1) a (v_k, u_1) é um caminho multicolorido. Senão, P' concatenado a (v_k, u_1) é um caminho multicolorido.

Agora, suponha $n > 2$. Pinte as arestas dos ciclos C_j, $0 \leq j < n$, e as arestas $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$, $0 \leq i < m$, da mesma forma que no caso $n = 2$. Seja H o subgrafo de G já colorido. Resta colorir as arestas dos caminhos $P_i' = (v_i, u_1)(v_i, u_2) \ldots (v_i, u_{n-1})$, $0 \leq i < m$. Pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$, $1 \leq j < n-1$, com cor $j + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Observe que cada caminho P_i', $0 \leq i < m$, é multicolorido e não contém cores usadas nas arestas de H. Então cada par de vértices em G tem um caminho multicolorido. De fato, qualquer par de vértices contido em $C_0 \cup C_1$ possui um caminho multicolorido já apresentado no caso $n = 2$. Considere o par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l), tal que $i \geq 1$ e $k > 1$. Então, o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j) no ciclo C_j é multicolorido, e o caminho de (v_k, u_j) a (v_k, u_l) em P_k' é multicolorido por construção. Agora, considere um caminho entre (v_i, u_0) e (v_k, u_l), $l > 1$. O caminho de (v_i, u_0) a (v_k, u_1), já apresentado no caso $n = 2$, concatenado ao caminho de (v_k, u_1) a (v_k, u_l), contido em P_k', é multicolorido. Observe que foram utilizadas $\lceil \frac{m}{2} \rceil + n - 2 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + n - 1$ cores. □

Teorema 3. *Seja $C_m \times C_n$ um grafo com m ímpar.*

$$rc(C_m \times C_n) \begin{cases} = 2, & \text{se } m = n = 3; \\ = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, & \text{se } m = 3 \text{ e } n > 3; \\ = \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2}, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é par;} \\ \leq \frac{m+n}{2}, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Considere $C_m \times C_n$ um grafo com m ímpar, $V(C_m) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$ e $V(C_n) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Sejam $X_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \ldots (v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$, $0 \leq j < n$, e $Y_i = (v_i, u_0)(v_i, u_1) \ldots (v_i, u_{n-1})(v_i, u_0)$, $0 \leq i < m$.

Se $m = n = 3$, pinte as arestas de cada ciclo X_j com cor 0, $0 \leq j < 3$, e pinte as arestas de cada ciclo Y_i com cor 1, $0 \leq i < m$. Por inspeção, é possível verificar que trata-se de uma coloração arco-íris. Resta considerar os casos em que pelo menos um entre m e n é maior que 3.

Se $m = 3$ e $n > 3$, pinte cada ciclo Y_i, $0 \leq i < m$, da seguinte forma. Se $0 \leq j < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor j. Se $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq j < n-1$, pinte $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $j - \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_{n-1})$ com cor $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Pinte as arestas de cada ciclo X_j, $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, com cor $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; e pinte as arestas de cada ciclo X_j, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < j < n$, com cor $j - \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Observe que os vértices de quaisquer dois ciclos, Y_p e Y_q, $0 \leq p, q \leq 2$, induzem um subgrafo isomorfo aos $C_n \times P_2$ e, portanto, os mesmos argumentos usados na prova do primeiro caso do Teorema 2 garantem que esta é uma coloração arco-íris.

Então, considere $m, n > 3$. Pinte cada ciclo X_j, $0 \leq j < n$, da seguinte forma. Se $0 \leq i < \lceil \frac{m}{2} \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor j. Se $\lceil \frac{m}{2} \rceil \leq j < m - 1$, pinte $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor $j - \lceil \frac{m}{2} \rceil$. Pinte $(v_0, u_j)(v_{m-1}, u_j)$ com cor $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$. Pinte as arestas $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1}) \in Y_i$, $0 \leq i < m$, da seguinte forma. Considere as somas nos índices módulo m. Se $0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ e $j \equiv 0 \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Se $\lceil \frac{m}{2} \rceil \leq i < m$ e $j \equiv 0 \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $i - \lceil \frac{m}{2} \rceil$. Se $j \not\equiv 0 \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ e $1 \leq j < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $j + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $0 \leq i < m$. Se $j \not\equiv 0 \pmod{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ e $\lceil \frac{n}{2} \rceil < j < n$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $j + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $0 \leq i < m$.

Considere um par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l), $0 \leq i, k < m$ e $0 \leq j, l < n$. Seja H o subgrafo induzido pelas arestas coloridas com as cores do conjunto $\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$. Se (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem à mesma componente conexa em H, então existe um caminho multicolorido entre esses vértices, como provado no Teorema 2. Então, suponha que (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem a componentes conexas distintas em H, O_1 e O_2, respectivamente. Existe em O_1 um caminho multicolorido P entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j). Além disso, se O_1 é um subgrafo isomorfo a $C_m \times P_2$, então existe em O_1 um caminho multicolorido P' entre (v_i, u_j) e (v_k, u_t), onde ou $t = j - 1$ ou $t = j + 1$. Como P e P' são caminhos em O_1, ambos estão coloridos com cores do conjunto $\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$. Por construção, em $C_m \times C_n$, ou existe um caminho multicolorido entre (v_k, u_j) e (v_k, u_l) ou existe um caminho multicolorido entre (v_k, u_j) e (v_k, u_t), com cores do conjunto $\{\lceil \frac{m}{2} \rceil, \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\}$. Portanto, existe um caminho multicolorido entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l).

Para $m, n > 3$, foram usadas $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ cores. Logo, se n é par, $\text{diam}(C_m \times C_n) = \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2} \leq rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2}$. Portanto, $rc(C_m \times C_n) = \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2}$. Quando n é ímpar, $\text{diam}(C_m \times C_n) = \frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2} \leq rc(C_m \times C_n) \leq \frac{m-1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{m+n}{2}$. $\square$

Com os resultados dos teoremas 1, 2 e 3, fica determinado o número de conexão arco-íris para os grafos resultantes de produtos cartesianos entre dois caminhos, entre ciclos e caminhos e entre dois ciclos, com exceção dos grafos $C_m \times C_n$ com m e n ímpares, $m, n > 3$. Neste subconjunto, apresentamos um limite superior para o número de conexão arco-íris que é no máximo uma unidade maior que o ótimo.

Referências

Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., and Yuster, R. (2011). Hardness and algorithms for rainbow connectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21:330–347.

Chandran, L. S., Das, A., Rajendraprasad, D., and Varma, N. M. (2012). Rainbow connection number and connected dominating sets. *Journal of Graph Theory*, 71:206–218.

Chartrand, G., Johns, G. L., McKeon, K. A., and Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1):85–98.

Li, X., Liu, S., Chandran, L. S., Mathew, R., and Rajendraprasad, D. (2012). Rainbow connection number and connectivity. *Electronic Notes of Combinatorics*, 19(1). P20.

Li, X., Shi, Y., and Sun, Y. (2013). Rainbow connections of graphs: A survey. *Graphs and Combinatorics*, 29(1):1–38.