

# Uma técnica para obtenção de atratores de autômatos celulares elementares

Eurico L. P. Ruivo<sup>1</sup>, Pedro P. B. de Oliveira<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Faculdade de Computação e Informática

<sup>2</sup>Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação  
Universidade Presbiteriana Mackenzie  
São Paulo, SP

eurico.ruivo@mackenzie.br, pedrob@mackenzie.br

**Abstract.** *Cellular automata are fully discrete dynamical systems with locally-defined dynamics. Such systems, in spite of its simplicity, are capable of showing complex global behaviour. One fundamental question in the study of cellular automata is what kind of limit-behaviour they might have. In the present work we present a method to infer attractors of elementary cellular automata by analysing the growth of the regular expressions describing the time evolution of a particular elementary cellular automaton.*

**Resumo.** *Autômatos celulares são sistemas dinâmicos totalmente discretos, apresentando uma dinâmica definida localmente. Apesar da simplicidade, tais sistemas são capazes de apresentar comportamento emergente global complexo. Uma questão fundamental no estudo dos autômatos celulares é sobre seu comportamento global para uma evolução temporal infinita do sistema. Aqui apresentamos uma técnica para inferir atratores de autômatos celulares elementares, tomando como base a análise das expressões regulares que descrevem as evoluções temporais finitas de um autômato celular elementar em particular.*

## 1. Introdução

Autômatos celulares (ACs) são sistemas dinâmicos totalmente discretos cujo comportamento global deriva de uma função definida localmente. ACs foram estudados tanto do ponto de vista matemático-computacional [Wolfram 2002, Kari 2005, Cook 2004], como modelos de sistemas complexos existentes no mundo real [Wolfram 2002], apesar das limitações dos ACs para essa última tarefa, conforme relatado em [Santé et al. 2010], por exemplo.

Em [Wolfram 1994], a complexidade dos ACs foi estudada através da observação de autômatos finitos capazes de reconhecer a linguagem definida pela iteração de uma regra sobre o conjunto de possíveis configurações iniciais. Uma das perguntas feitas no referido trabalho diz respeito a quais são os possíveis comportamentos que podem surgir numa evolução temporal infinita de uma dada regra.

Em um trabalho anterior [De Oliveira et al. 2016] foi apresentado um método para detecção de padrões de crescimento nos autômatos finitos que descrevem as configurações que podem ser obtidas iterando-se uma dada regra sobre o conjunto de configurações iniciais. Tal método possibilita a inferência de autômatos finitos que descrevem o comportamento da regra em questão para um número finito de iterações, mas não a inferência de

seu comportamento-limite. Aqui apresentamos uma técnica para a inferência de atratores de regras de ACEs a partir da análise das propriedades da regra e das expressões regulares que descrevem seu comportamento para evoluções temporais finitas. O presente trabalho consiste na descrição de uma técnica utilizada em parte de um artigo submetido a periódico internacional [Ruivo e de Oliveira 2017].

### 1.1. Definições básicas

- Um *autômato celular* (AC) é uma quádrupla  $A = (S, N, f, d)$  [Kari 2005], na qual:  $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , é o *conjunto de estados*;  $N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ ,  $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}^d$ , é o *vetor de vizinhança*;  $f : S^n \rightarrow S$  é sua *função de transição local* ou *regra local* e  $d \in \mathbb{Z}_+$  é sua *dimensão*.
- Uma *configuração* é uma função  $c : \mathbb{Z}^d \rightarrow S$ . O conjunto das funções de  $\mathbb{Z}^d$  em  $S$  é denotado por  $S^{\mathbb{Z}^d}$  e é denominado o *espaço das configurações*.
- Dado um AC  $A = (S, N, f, d)$ , a regra local  $f$  do AC induz uma *função de transição global*  $F : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  no espaço das configurações da seguinte maneira:  $(F(c))(\vec{v}) = f(\vec{v} + \vec{v}_1, \vec{v} + \vec{v}_2, \dots, \vec{v} + \vec{v}_n)$ ,  $\forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^d$
- Um *autômato celular elementar* (ACE) é um AC no qual  $S = \{0, 1\}$ ,  $N = (-1, 0, 1)$  e  $d = 1$ . A cada ACE de regra local  $f$  é possível associar um número, denominado *número de Wolfram* [Wolfram 2002].
- Sendo  $F$  a função global induzida por  $f$ , denota-se denotando por  $F^t(c)$  a iteração de  $F$   $t$  vezes sobre  $c$ . Sendo  $\Omega^0$  o conjunto de todas as configurações binárias, o conjunto  $F^t(\Omega^0)$  é denotado por  $\Omega_f^t$ . Por sua vez,  $\Omega_{f,[w]}^t$  indica o conjunto de configurações obtidas iterando-se  $F$   $t$  vezes sobre o conjunto de todas as configurações iniciais que não contém  $w$  como subcadeia.
- Dado um ACE  $A$  de regra local  $f$  e  $U \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , o *conjunto  $\omega$ -limite de  $U$*  é o conjunto  $\omega(U)$  dado por [Di Lena e Margara 2010]  $\bigcap_{n>0} (\bigcup_{m>n} F^m(U))$ . Um *atrator* de  $A$  é um conjunto  $Y \subset S^{\mathbb{Z}}$  não-vazio tal que  $F(Y) = Y$  e  $Y = \omega(U)$  para algum  $U$  com  $F(U) \subseteq U$ . O *conjunto-limite*  $\Omega_f$  como a união de todos os atratores de  $A$ . A linguagem que o descreve é denominada *linguagem-limite de  $f$* .

Foi mostrado em [Wolfram 1994] que os conjuntos  $\Omega_f^t$  obtidos a partir de ACEs podem ser descritos por linguagens regulares fatoriais (denominadas *linguagens de processo*). A representação gráfica do reconhecedor de uma linguagem de processo corresponde a um *grafo de processo* (GP). Para saber se uma cadeia é reconhecida por um GP, basta verificar se existe algum caminho no grafo que corresponda a essa cadeia.

## 2. Grafos de processo

Dada a regra local  $f$  de um ACE, foi descrito em [Wolfram 1994, Wolfram 2002] um método iterativo para obter o GP  $G_f^t$  que descreve o conjunto  $\Omega_f^t$ . Observou-se em [De Oliveira et al. 2016] que as regras 32, 128, 136, 160, 168 e 184 do espaço dos ACEs produziam GPs com padrões de crescimento. No mesmo artigo, foi sugerido um método para reconhecer automaticamente tais padrões, o que possibilitou a inferência direta de GPs para um número maior de iterações  $t$ . Apesar de ser possível inferir, a partir da observação do crescimento dos grafos, GPs para evoluções temporais finitas, tal método não pode ser aplicado para obter o conjunto-limite da regra  $f$ . A alternativa é analisar a evolução das expressões regulares que descrevem as linguagens induzidas pelos GPs de  $\Omega_f^t$ .

Dessa forma, a expressão que descreve a linguagem-limite deve ser regular. Para isso, deve satisfazer duas condições: (i) Deve ser escrita como somas e/ou concatenações de expressões regulares; (ii) Deve ser finita.

Apesar de alguns ACs apresentarem GPs com crescimento simples, essa não é a regra geral. A seguir aplicamos as técnicas expostas nesta seção para a regra 178 do espaço dos ACEs para a qual foram detectados padrões de crescimento em seus GPs.

### 3. Inferência de um atrator da regra 178

A função local  $f_{178}$  da regra 178 é dada por:  $f_{178}(x, y, z) = 1$ , se  $(x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ ; e  $f_{178}(x, y, z) = 0$ , caso contrário.

Apesar dos GPs da regra 178 apresentarem crescimento linear, não foi possível obter uma expressão regular geral que descreva seu comportamento em tempo finito, devido a limitações computacionais. A fim de analisar os atratores dessa regra, excluíram-se cadeias progressivamente maiores de 0s e de 1s (separadamente) e ao fim ambos os resultados foram agregados. Abaixo enunciamos (sem demonstração) resultados utilizados para a análise do comportamento da regra 178.

**Proposição 3.1.** Seja  $c \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  uma configuração na qual a maior cadeia de 0s (respectivamente 1s) consecutivos apresenta tamanho  $l \geq 3$ . Então  $F_{178}(c)$  é uma configuração na qual a maior cadeia de 0s (respectivamente 1s) consecutivos apresenta tamanho  $l - 2$ .

**Proposição 3.2.** Para todo inteiro  $n > 3$ ,  $\Omega_{178, [0^n]}^{n-2} \subseteq \Omega_{178, [0^3]}^1$  e  $\Omega_{178, [1^n]}^{n-2} \subseteq \Omega_{178, [1^3]}^1$ .

**Corolário 3.1.** Para quaisquer inteiros  $n > 3$  e  $t \geq 1$ ,  $\Omega_{178, [0^n]}^{(n-2)+t-1} \subseteq \Omega_{178, [0^3]}^t$  e  $\Omega_{178, [1^n]}^{(n-2)+t-1} \subseteq \Omega_{178, [1^3]}^t$ .

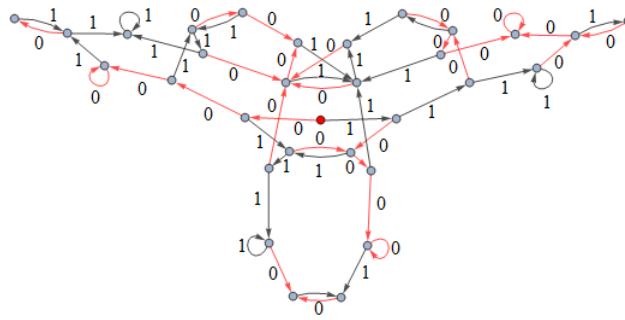
**Corolário 3.2.** Para todo inteiro  $n > 3$ ,  $\Omega_{178, [0^n]} = \Omega_{178, [0^3]}$  e  $\Omega_{178, [1^n]} = \Omega_{178, [1^3]}$ .

Em outras palavras, a regra 178 faz com que, após um número suficiente de iterações, configurações iniciais que contenham cadeias de 0s (e de 1s) consecutivos de tamanho maior que três sejam transformadas em configurações que não apresentam as subcadeias “000” nem “111”.

Vale notar que a análise de  $\Omega_{178, [0^3]}$  e  $\Omega_{178, [1^3]}$  cobre apenas parcialmente o conjunto-limite da regra 178: apenas as configurações obtidas a partir de configurações iniciais que não pertencem a  $\Omega_{178, [0^\infty]}^0 \cup \Omega_{178, [1^\infty]}^0$ . Para cada tipo de exclusão, foi realizada uma análise do crescimento das expressões regulares, com o intuito de obter expressões gerais para um número arbitrário  $t$  de iterações. Então, a partir dessas expressões, foram inferidas linguagens-limite descrevendo os atratores para ambos os tipos de exclusão. Por fim, as expressões regulares inferidas foram somadas, obtendo a expressão regular que descreve o atrator da regra 178 obtido a partir do conjunto  $\Omega_{178, [0^\infty]} \cup \Omega_{178, [1^\infty]}$ . A Figura 1 mostra o autômato finito determinístico que descreve esse atrator.

### 4. Conclusões

No presente trabalho apresentou-se uma técnica para inferir atratores do conjunto-limite de autômatos celulares elementares através da análise do crescimento das expressões regulares que descrevem conjuntos de configurações obtidas a partir de um número finito



**Figura 1. Autômato finito determinístico descrevendo um atrator da regra 178.**

de iterações da regra do ACE sobre um subconjunto de configurações. Em particular, aplicou-se essa técnica para obter um atrator para a regra 178, para a qual não foi possível observar a existência ou não de padrões de crescimento devido a limitações computacionais. Para solucionar parcialmente tal situação, restringiu-se o conjunto de configurações iniciais, gerando conjuntos de expressões regulares para as quais foi possível obter uma descrição geral de seu padrão de crescimento, o que permitiu a inferência do autômato finito que descreve o atrator gerado por esse subconjunto de configurações iniciais.

Uma análise de como subconjuntos específicos de configurações iniciais podem afetar a dinâmica do crescimento dos grafos de processo e de sua complexidade é uma possibilidade interessante para a continuidade deste trabalho.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao MackPesquisa (Fundo Mackenzie de Pesquisa) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

### Referências

- Cook, M. (2004). Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15(1):1–40.
- De Oliveira, P. P. B., Ruivo, E. L. P., Costa, W. L., Miki, F. T. e Trafaniuc, V. V. (2016). Advances in the study of elementary cellular automata regular language complexity. *Complexity*, 21(6):267–279.
- Di Lena, P. e Margara, L. (2010). On the undecidability of the limit behavior of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 411(7):1075–1084.
- Kari, J. (2005). Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, 334(1–3):3–33.
- Ruivo, E. L. P. e de Oliveira, P. P. B. (2017). Inferring the limit behaviour of some elementary cellular automata. *Manuscrito não publicado submetido ao International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- Santé, I., García, A. M., Miranda, D. e Crecente, R. (2010). Cellular automata models for the simulation of real-world urban processes: A review and analysis. *Landscape and Urban Planning*, 96(2):108–122.
- Wolfram, S. (1994). *Cellular Automata and Complexity*. Addison-Wesley Publishing Co.
- Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media.