Grafos Half Cut

Rubens A. Sucupira[1], **Sulamita Klein**[2], **Luerbio Faria**[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

[2]COPPE Sistemas – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

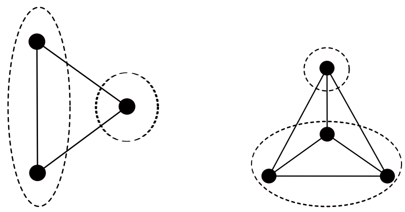
Abstract. *[Erdös 1965] showed that every graph $G = (V, E)$ with m edges admits an edge cut of size at least $\frac{m}{2}$. In this paper we define a new graph class: Half Cut graphs. A graph is Half Cut if it admits an edge cut with exactly $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ edges. We also give some simple examples such as paths, cycles and complete graphs that must satisfy special conditions to be Half Cut graphs.*

Resumo. *[Erdös 1965] mostrou que todo grafo $G = (V, E)$ com m arestas admite um corte de arestas com cardinalidade pelo menos $\frac{m}{2}$. Neste artigo definimos a classe de grafos Half Cut como os grafos que admitem um corte de arestas com cardinalidade igual a $\lceil \frac{m}{2} \rceil$. Nós também damos exemplos de grafos tais como caminhos, ciclos e grafos completos que devem satisfazer condições especiais para que sejam do tipo Half Cut.*

1. Definições e Exemplos

Dados um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas, e um subconjunto não vazio próprio $S \subset V$, definimos o *corte de arestas* ∂S como o conjunto formado por todas as arestas com exatamente um extremo em S. Dizemos que um corte de arestas ∂S tal que $|\partial S| = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ é um *half cut*. Um grafo $G = (V, E)$ é do tipo *Half Cut* se admite um *half cut*.

Um exemplo trivial de grafo Half Cut é o grafo completo K_3 no qual todo corte de arestas tem cardinalidade $2 = \lceil \frac{3}{2} \rceil$. Outro exemplo simples da classe dos grafos completos é K_4 que tem 6 arestas e admite um *half cut* tomando-se $S = \{v\}$ para qualquer $v \in V$, já que $d(v) = 3$ para todo $v \in V(K_4)$.



(a) (b)

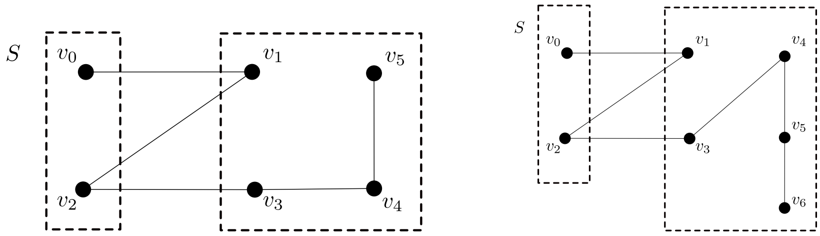
Figura 1. (a) Half cut de K_3 e (b) Half cut de K_4.

Na próxima seção mostramos que todo caminho $P_n = (v_0, v_1, \cdots, v_{n-1})$ é do tipo Half Cut e que um ciclo C_n com $n > 3$ é do tipo Half Cut se e somente se $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ ou $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$.

2. Caminhos, Ciclos e Árvores

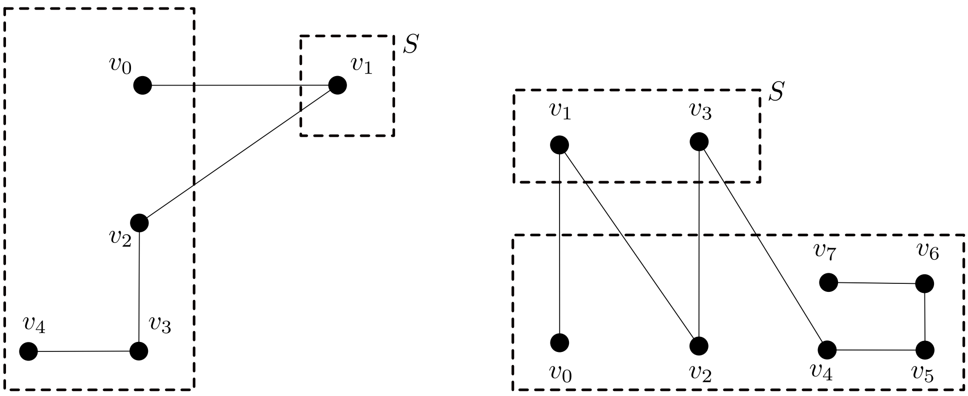
Teorema 2.1. *Todo caminho é do tipo Half Cut.*

Demonstração. Seja $P_n = (v_0, v_1, \cdots, v_{n-1})$ um caminho com n vértices e $n-1$ arestas. Temos dois casos a considerar: No primeiro caso, $n \equiv 2, 3 (\text{mod } 4)$, basta tomarmos $S = \{v_i | i \equiv 0(\text{mod } 2); 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$ para obtermos um half cut. No segundo caso, $n \equiv 0, 1(\text{mod } 4)$, e podemos tomar $S = \{v_i | i \equiv 1(\text{mod } 2); 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$ para obtermos tal corte. As Figuras 2 e 3 ilustram esses dois casos.



(a) (b)

Figura 2. (a) Half cut de P_6 e (b) Half cut de P_7.



(a) (b)

Figura 3. (a) Half cut de P_5 e (b) Half cut de P_8.

□

Teorema 2.2. *Um ciclo C_n é do tipo Half Cut se e somente se $n \equiv 0(mod\, 4)$ ou $n \equiv 3(mod\, 4)$.*

Demonstração. Seja $C_n = (v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1)$ um ciclo com $n > 3$. Inicialmente podemos observar que todo corte de arestas em um ciclo tem cardinalidade par, já que o ciclo é um caminho fechado. Portanto se $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ é ímpar, não existe nenhum corte de arestas de C_n com metade das arestas do ciclo, ou seja, para que o problema da determinação do Half Cut tenha solução, é necessário que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ seja par. Temos dois casos a considerar: $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ e $n \equiv 3(\text{mod } 4)$. Se $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, basta tomarmos $S = \{v_i | i \equiv 2, 3(\text{mod } 4)\}$ para obtermos um half cut, já que cada um desses vértices corresponde a uma aresta de corte. Observando que as sequências $(4i+2)$ e $(4i+3)$ para

$0 \leq i \leq \frac{n}{4} - 1$ são duas progressões aritméticas, ambas com o mesmo número de termos $\frac{n}{4}$, obteremos um corte com $\frac{n}{2}$ arestas.

Se $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, vamos analisar a paridade de $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ obtendo dois subcasos a considerar. Caso $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ seja par, podemos tomar $S = \{v_i | i \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4)\}$ e caso $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ seja ímpar, tomamos $S = \{v_i | i \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4), 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\} \cup \{v_i | i \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\, 4), \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-1\}$. □

Teorema 2.3. *Toda árvore é do tipo Half Cut.*

Demonstração. Aplicamos indução forte sobre o número de arestas da árvore. Para uma árvore com uma aresta temos um caminho P_2 e segue imediatamente do Teorema 2.1 o resultado. Suponhamos que toda árvore com m arestas, sendo $1 \leq m \leq k$ é do tipo Half Cut. Dada uma árvore T com $k+1$ arestas, a remoção de uma aresta qualquer de T desconecta esse grafo dando origem a pelo menos duas componentes conexas que são subárvores de T. Sem perda de generalidade, suponhamos que a remoção da aresta $e = \{u, v\} \in E(T)$ dá origem às árvores T_1 e T_2, com m_1 e m_2 arestas, respectivamente, sendo $u \in V(T_1)$ e $v \in V(T_2)$. Se o número de arestas de T, dado por $m = m_1 + m_2 + 1$ for par, então $m_1 + m_2$ é ímpar, ou seja, uma das subárvores tem um número par de arestas, enquanto a outra tem número ímpar. Digamos que m_1 seja par e m_2 seja ímpar. Pela hipótese de indução existem cortes de arestas de T_1 e de T_2 com cardinalidades $\frac{m_1}{2}$ e $\frac{m_2+1}{2}$, respectivamente. Logo basta tomarmos $S \subset V$ tal que $u \in S$ e $v \in S$ e teremos um corte de arestas com $\frac{m_1+m_2+1}{2}$ arestas, ou seja, $\frac{m}{2}$ arestas como desejado. Se m é ímpar, então m_1 e m_2 são ambos pares ou ambos ímpares. Caso sejam ambos ímpares, pela hipótese de indução existem cortes de T_1 e T_2 com $\frac{m_1+1}{2}$ e $\frac{m_2+1}{2}$ arestas, respectivamente. Novamente fazendo $u \in S$ e $v \in S$ e teremos um corte de arestas com $\frac{m_1+m_2+2}{2}$ arestas, ou seja, $\frac{m+1}{2} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ arestas. Caso sejam ambos pares, pela hipótese de indução existem cortes de T_1 e T_2 com $\frac{m_1}{2}$ e $\frac{m_2}{2}$ arestas, respectivamente. Posicionando apenas um dos vértices u ou v em S, obtemos um corte de arestas com $\frac{m_1+m_2}{2} + 1$ arestas, isto é, $\frac{m_1+m_2+2}{2}$ arestas, o que conclui a demonstração. □

3. Grafos Completos do tipo Half Cut

Sabemos que em um grafo completo com n vértices, um corte de arestas ∂S tem cardinalidade dada por $|S| \cdot (n - |S|)$. A partir desse fato podemos determinar condições necessárias e suficientes para que um grafo completo seja do tipo Half Cut.

Em um grafo completo com n vértices, sabemos que $m = \frac{n(n-1)}{2}$, isto é, um half cut deverá ter $\lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil$ arestas. Desse modo, precisamos resolver a equação $p(n-p) = \lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil$ na qual $p = |S|$, para determinarmos um half cut, caso exista. Analisando os casos $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ e $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, chegamos à conclusão que existe um half cut se, e somente se, existe um natural q tal que $n = q^2$ ou $n = q^2 + 2$. Obtemos assim o teorema a seguir.

Teorema 3.1. *O grafo completo K_n é do tipo Half Cut se e somente se $n = q^2$ ou $n = q^2 + 2$.*

Demonstração. De fato, se $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ou $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, então $\frac{n(n-1)}{4}$ é inteiro e podemos resolver diretamente a equação $p(n-p) = \frac{n(n-1)}{4}$, obtendo como soluções

$p = \frac{n+\sqrt{n}}{2}$ e $p = \frac{n-\sqrt{n}}{2}$ que só têm sentido se n for quadrado perfeito, já que p é inteiro positivo. Se $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, então $n = 4k+2$ para algum natural k e assim temos $\lceil\frac{n(n-1)}{4}\rceil = 4k^2+3k+1$. Resolvendo a equação associada obtemos as soluções $p = (2k+1)+\sqrt{k}$ e $p = (2k+1)-\sqrt{k}$ que só têm sentido quando k é um quadrado perfeito. Desse modo devemos ter $n = 4q^2+2$, sendo $k = q^2$. Se $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, então $n = 4k+3$ para algum natural k e assim temos $\lceil\frac{n(n-1)}{4}\rceil = 4k^2+5k+2$. Resolvendo a equação associada obtemos as soluções $p = \frac{n+\sqrt{4k+1}}{2}$ e $p = \frac{n-\sqrt{4k+1}}{2}$ que só têm sentido quando $4k+1 = n-2$ é um quadrado perfeito. Desse modo, devemos ter $n-2 = q^2$, ou seja, $n = q^2+2$. Portanto um grafo completo K_n é do tipo Half Cut se e somente se $n = q^2$ ou $n = q^2+2$. □

4. Grafos Graciosos

Uma rotulação graciosa de um grafo $G = (V, E)$ é composta por uma rotulação dos vértices $f : V \to \{0, 1, \cdots, m\}$ e uma rotulação das arestas $f_\gamma : E \to \{1, 2, \cdots, m\}$ definida por $f_\gamma(\{u, v\}) = |f(u) - f(v)|$ ambas injetivas. Se G admite uma rotulação graciosa, então G é dito um *grafo gracioso*. [Golomb 1972] provou que todo grafo gracioso é do tipo Half Cut. A seguir apresentamos a demonstração desse fato devida a ele.

Teorema 4.1. *Todo grafo gracioso é do tipo Half Cut.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo gracioso com uma rotulação f. Considere $S = \{u \in V | f(u) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}$. Como existem $\lceil\frac{m}{2}\rceil$ inteiros ímpares entre 1 e m, e uma diferença ímpar só é possível efetuando-se uma subtração entre um inteiro par e um ímpar, então o número de arestas conectando vértices com paridades distintas é exatamente $\lceil\frac{m}{2}\rceil$. □

[Rosa 1966] provou que todo caminho P_n e os ciclos C_n com $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ ou $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ são grafos graciosos. Desse modo, os resultados obtidos na Seção 2 poderíam ter sido encontrados como consequência do Teorema 4.1. Grandes esforços têm sido feitos na tentativa de provar a conjectura de Ringel-Kotzig [Huang et al. 1982] a qual afirma que todas as árvores são graciosas. Nesse artigo fornecemos processos algorítmicos para a determinação dos half cuts em classes simples de grafos e, além disso, mostramos que a classe dos grafos graciosos está estritamente contida na classe dos grafos Half Cut, pois há vários grafos Half Cut que não são graciosos, como por exemplo, os grafos completos K_n com $n = q^2$, sendo $q > 2$.

Referências

Erdös, P. (1965). On some extremal problems in graph theory. *Israel Journal of Mathematics*, 3:113–116.

Golomb, S. W. (1972). How to number a graph. *Graph theory and computing*, pages 23–37.

Huang, C., Kotzig, A., and Rosa, A. (1982). Further results on tree labellings. *Util. math., 21c*, pages 31–48.

Rosa, A. (1966). On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome*, pages 349–355.