Modelo Matemático para o Problema de Transporte Escolar em Zonas Rurais

Jean N. R. Araujo[1]

[1]Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – UFMG

{jeannra}@ufmg.br

Abstract. *This paper presents a generic mathematical model for the School Bus Routing Problem (SBRP) in rural areas, in order to minimize the total cost involved end ensuring that students are transported timely. Factors such as vehicle capacity and time window of schools are observed in the model.*

Resumo. *Neste trabalho é apresentado um modelo matemático genérico para o Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (PROE) em zonas rurais, com o objetivo de minimizar o custo total envolvido a fim de assegurar que os alunos sejam transportados em tempo. Fatores como capacidade do veículo e janela de tempo das escolas são observados no modelo.*

1. Introdução

Em pesquisa apresentada em [Bezerra et al. 2013], calcula-se que 36% da população brasileira é rural. Em [Lima et al. 2016], o autor diz que, em 2013, o Brasil tinha mais de 50 milhões de estudantes matriculados em um sistema educacional público complexo que abrange mais de 198 mil escolas públicas estaduais e municipais, onde 14% desses alunos são moradores de áreas rurais, servidos por escolas públicas multisseriadas (24% do número total de escolas). Nas escolas multisseriadas, grupos de estudantes de diferentes séries são educados por um único professor em uma única sala de aula.

Esforços tem sido empregados para transferir os estudantes de escolas rurais multisseriadas para escolas com localização central, com melhor infraestrutura e com classes de série única [Lima et al. 2016]. No entanto, tem sido um grande desafio para as autoridades públicas gerir os serviços de transporte escolar rural [Lima et al. 2016]. Como os recursos previstos são escassos, geralmente não é possível utilizar ônibus para transportar alunos de uma única escola [Park and Kim 2010].

O Problema de Roteamento de Ônibus Escolar (PROE) é um problema de transporte que tem sido alvo de pesquisas na área de otimização visando gerar rotas de ônibus escolares considerando um conjunto de estradas, escolas, paradas, alunos, veículos, e qualquer outro fator importante que se deseje considerar [Park and Kim 2010]. O presente trabalho objetiva criar um modelo matemático consistente e genérico considerando uma frota heterogênea de ônibus que precisam atender a zona rural de determinado município. Na abordagem utilizada os veículos poderão transportar alunos de escolas diferentes respeitando restrições como: capacidade do veículo, tempo máximo de estadia do aluno no transporte e janela de tempo das escolas.

2. Modelo Proposto

Considere um sistema de transporte escolar que atenda um conjunto de paradas $P = \{1, \ldots, n_p\}$ que estão distribuídas na zona rural de determinado município em que existe um conjunto de Escolas $E = \{n_p + 1, \ldots, n_p + n_e\}$. Esse problema pode ser representado por um grafo não direcionado $G = (V, A)$, onde $V = \{0\} \cup P \cup E$ é o conjunto de vértices mapeados que descreve o trajeto do ônibus saindo da garagem (vértice 0), percorrendo as paradas e a(s) escola(s). Logo, $A = \{(i, j) : i, j \in V\}$ é o conjunto de arestas que conectam tais vértices. Para cada parada $i \in P$, existe um conjunto $K_i \subseteq E$ de escolas que precisam ser atendidas, no qual $d_{ik} > 0$ estudantes da parada i deve(m) ser transportado(s) para a escola k. Todos os $q_i = \sum_{k \in K_i} d_{ik}$ alunos da parada i devem ser apanhados pelo mesmo ônibus, ao mesmo tempo, e transportados para as escolas em K_i [Alves et al. 2015, Sarubbi et al. 2014, Lima et al. 2016].

Considere B um conjunto de ônibus de diferentes capacidades estacionados na garagem. Cada ônibus $b \in B$ tem capacidade Q_b, custo fixo s_b, e distância máxima permitida de ρ_b. Assume-se que $Q_1 \leq Q_2 \leq \ldots \leq Q_{|B|}$ e $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{|B|}$. Cada aresta $(i, j) \in A$ tem um custo não negativo $c_{ij}^b = \theta_b \ell_{ij}$, e que depende do ônibus $b \in B$ que irá trafegar naquele trecho. Portanto, θ_b é o custo unitário por km para o ônibus b, e ℓ_{ij} é a distância da parada i para a parada ou escola j.

Seja R_b um subconjunto de arestas de A, o que denota um subgrafo $G'(R_b)$ que gera uma rota a ser percorrida pelo ônibus b partindo da garagem, pegando os estudantes nas paradas P_b, e distribuindo às escolas K_b, antes de retornar à garagem. Deste modo,

Tabela 1. Notação do método proposto

Conjuntos:
P : Conjunto de Paradas
P_b : Conjunto de Paradas atreladas à um ônibus - $P_b \subseteq P$
E : Conjunto de Escolas
B : Conjunto de Ônibus
V : Conjunto de Vértices [garagem, paradas e escola(s)]
A : Conjunto de Arestas
K_i : Conjunto de Escolas atreladas a uma parada - $K_i \subseteq E$
K_b : Conjunto de Escolas atreladas a um ônibus - $K_b \subseteq E$
Q_b : Conjunto de capacidades dos veículos
Parâmetros:
d_{ik} : N^o de alunos da parada $i \in P$ que serão levados para a escola $k \in K_i$
q_i : Qtd. de alunos da parada $i \in P$ pegos pelo mesmo ônibus, ao mesmo tempo
s_b : Custo fixo do veículo $b \in B$
c_{ij}^b : Custo não negativo de cada aresta $(i, j) \in A$ para o ônibus $b \in B$
θ_b : Custo unitário por km para o ônibus b
ℓ_{ij} : Distância da parada i para a parada ou escola j
ρ_b : Distância máxima que dado ônibus pode percorrer com aluno
$[\alpha, \omega]$: Janela de tempo entre primeiro vértice e último vértice de determinada rota
t_{ij} : Tempo do percurso entre o vértice i e o vértice j
Variáveis:
$y_i^b = 1$:, se a parada $i \in V - \{0\})$ é atribuída ao ônibus $b \in B$. 0, caso contrário
$z^b = 1$:, se o ônibus $b \in B$ está atribuído à uma rota; 0, caso contrário.
$x_{ij}^b = 1$:, se a aresta $(i, j) \in A$ é usada na rota do ônibus $b \in B$; 0, caso contrário

$G^{'}(V(R_b), R_b)$ é um subgrafo induzido por R_b, no qual $V(R_b)$ é o conjunto de vértices ligadas a no mínimo uma aresta de R_b. Ou seja, $G^{'}(R_b)$ se configura um ciclo simples com início e fim no vértice 0 (garagem), de tal modo que a demanda total de estudantes nas paradas P_b não exceda a capacidade máxima Q_b de estudantes suportada pelo ônibus b. O custo da rota é dado pela soma dos custos das arestas que formam o ciclo, e pelo custo fixo do ônibus s_b.

Sendo $A = \{(i, j) : i, j \in V\}$ o conjunto de arestas, existe um tempo de percurso t_{ij} associado a aresta A_{ij}. Observando que há uma janela de tempo $[\alpha, \omega]$ associada a rota R_b de determinado veículo respeitando o ínicio da aula em cada escola E, sendo α o horário de saída da garagem e ω o horário da escola com entrada mais tardia. É permitido que o veículo chegue ao último vértice antes de ω, no entanto, ele precisa esperar o tempo ω para deixar a localidade. O problema consiste então em projetar estas rotas de tal forma que todos os alunos sejam transportados para suas respectivas escolas a um custo total mínimo, onde cada parada é visitada apenas uma vez por qualquer ônibus.

Considere $y_i^b \in \{0, 1\}$ uma variável inteira igual a 1, se a parada $i \in V - \{0\})$ é atribuída ao ônibus $b \in B$; 0, caso contrário. Considere $z^b \in \{0, 1\}$ uma variável inteira igual a 1, se o ônibus $b \in B$ está atribuído à uma rota; 0, caso contrário. Considere $x_{ij}^b \in \{0, 1\}$ uma variável inteira igual a 1, se a aresta $(i, j) \in A$ é usada na rota do ônibus $b \in B$; 0, caso contrário. A notação usada neste trabalho é sintetizada na Tabela 1 e o modelo matemático de Programação Inteira para esse problema é formulado a seguir:

$$\text{Minimize} \sum_{b=B} \left[s_b z^b + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^b x_{ij}^b \right] \tag{1}$$

$s.a.$

$$\sum_{b\in B} y_i^b = 1 \qquad \forall i \in P \tag{2}$$

$$\sum_{i\in P} q_i y_i^b \leq Q_b z^b \qquad \forall b \in B \tag{3}$$

$$y_i^b \leq y_i^k \qquad \forall i \in P, k \in K_i, b \in B \tag{4}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}^b + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji}^b = 2y_i^b \qquad \forall j \in V - \{0\}, b \in B \tag{5}$$

$$\sum_{(0,j)\in A} x_{0j}^b = z^b \qquad \forall b \in B \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j)\in A: i\in P, j\in E} x_{ij}^b = z^b \qquad \forall b \in B \tag{7}$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total. A restrição em (2) garante que cada parada é atribuída a um ônibus. Em (3) busca-se garantir que a capacidade de cada ônibus não será excedida. A restrição descrita em (4) assegura que se uma parada é atribuída a um ônibus, as escolas associadas aos estudandes que aguardam nessa parada são também visitadas pelo mesmo ônibus. As restrições em (5) e (6) descrevem restrições de grau para as paradas visitadas por um ônibus, e para a garagem onde um ônibus está vinculado, respectivamente. A restrição em (7) impõe que apenas uma aresta conectando uma parada à uma escola deverá ser usada sempre quando um ônibus é atribuído a uma rota, o que garante que o ônibus irá pegar todos os alunos atribuídos à ele antes de se dirigir às escolas.

$$\sum_{(i,j)\in A: i,j\in S} x_{ij}^b \leq \sum_{i\in S\setminus\{k\}} y_i^b \quad \forall b \in B, k \in S, S \subseteq V - \{0\} \tag{8}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \ell_{ij} x_{ij}^b \leq \rho_b \qquad \forall j \in V - \{0\}, b \in B \tag{9}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}^b x_{ij}^b + \alpha_b \leq \omega_b \qquad \forall j \in V - \{0\}, b \in B \tag{10}$$

$$x_{ij}^b \in 0,1 \qquad \forall (i,j) \in A, b \in B \tag{11}$$

$$y_i^b \in 0,1 \qquad \forall i \in V - \{0\}, b \in B \tag{12}$$

$$z^b \in 0,1 \qquad \forall b \in B \tag{13}$$

A Eq. 8 garante que as paradas atribuídas a um ônibus são conectadas. A restrição endereçada pela Eq. 9 impede que os ônibus transportem alunos por uma distância superior a ρ_b. A Eq. 10 certifica que o tempo total do trajeto não supere o horário de entrada mais tardio. Finalmente, as Eqs. 11, 12 e 13 são restrições de domínio.

3. Conclusão

No cenário brasileiro, para este problema, existe a necessidade de adotar soluções que permitam transportar alunos de escolas diferentes ao mesmo tempo, bem como utilizar frota heterogênea que possibilite atender regiões densas e esparsas, observando a indispensabilidade de oferecer educação de qualidade a todas as regiões. Em relação ao métodos de resolução, tem sido desenvolvidas heurísticas e meta-heurísticas, que englobam algoritmos exatos e probabilísticos. Dentre as meta-heurísticas mais utilizadas destaca-se a Busca Tabu, os Algoritmos Evolucionários e as Redes Neurais. O modelo apresentado neste trabalho visa ser resolvido empregando algoritmos exatos para Programação Inteira como *Branch and Bound* e *Branch and Cut*. Espera-se obter resultados com garantia de otimalidade e com tempo computacional competitivo considerando esse problema em um município de grande densidade populacional nas zonas rurais.

Referências

Alves, F. S. et al. (2015). Problemas de roteamento de veículos aplicados no planejamento logístico do transporte escolar da cidade de coxim-ms.

Bezerra, M. L., Bacelar, T., Miranda, C. O. d. S., and Silva, H. O. d. S. (2013). Concepções da ruralidade contemporânea: as singularidades brasileiras.

Lima, F. M. S., Pereira, D. S., Conceição, S. V., and Nunes, N. T. R. (2016). A mixed load capacitated rural school bus routing problem with heterogeneous fleet: algorithms for the brazilian context. *Expert Systems with Applications*, 56:320–334.

Park, J. and Kim, B.-I. (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of operational research*, 202(2):311–319.

Sarubbi, J., Faraj, M., and Machry, F. (2014). Estudo de caso: o problema do transporte escolar rural em minas gerais. Simpøsio Brasileiro de Pesquisa Operacional.