Algoritmo de Aproximação para o Problema da Evacuação por Ônibus*

Lehilton L. C. Pedrosa[1], **Rafael C. S. Schouery**[1]

[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251 – 13083-852 – Campinas – SP – Brasil

{lehilton,rafael}@ic.unicamp.br

Abstract. *We consider the Bus Evacuation Problem (BEP) in which, given a number B, a bipartite graph with parts S and T in a metric space, and a vertex r, one wishes to find a set of B walks, each starting in r and finishing in T so that each vertex i of S is visited at least l_i times, and each vertex j of T is visited at most u_j times. The objective is to find a solution that minimizes the length of the longest walk. This problem arises in emergency planning situations where the walks correspond to the routes of B buses, that must transport each group of people in S to a safe zone in T. In this paper, we give a 5.2-approximation algorithm for the uncapacitated BEP, where u_j is infinity for each j.*

Resumo. *No Problema de Evacuação por Ônibus (BEP), dado um inteiro B, um grafo bipartido com partes S e T em um espaço métrico, e um vértice r, deseja-se encontrar um conjunto de B passeios, cada um começando em r e terminando em um vértice de T, de forma que cada vértice i de S é visitado no mínimo l_i vezes e cada vértice de T é visitado no máximo u_j vezes. O objetivo é encontrar uma solução que minimiza o comprimento da maior rota. Esse problema aparece em situações de planejamento para emergência, em que cada passeio corresponde à rota de um de B ônibus, que devem transportar cada grupo de pessoas em S para uma área segura em T. Neste trabalho, obtemos uma $5{,}2$-aproximação para BEP sem capacidades, em que u_j é infinito para cada j.*

1. Introdução

O objetivo do Problema da Evacuação por Ônibus (*Bus Evacuation Problem*, BEP) é determinar, a priori, uma política de evacuação e resgate de pessoas em eventos e situações de risco, como enchentes, terremotos, furacões etc. Em tais situações, é comum que os meios de transporte individuais (automóvel e demais) não estejam disponíveis ou não sejam uma opção viável, então a estratégia recomendada é que, uma vez dado um alerta de risco, as pessoas caminhem até o ponto de evacuação mais próximo. O resgate das pessoas é feito em seguida por meio de um número fixo de ônibus, estacionados em um depósito que levam cada grupo de pessoas a um de vários abrigos seguros. Cada ônibus faz uma ou mais viagens, a depender de sua capacidade e distância percorrida. Como

*Este trabalho foi parcialmente financiado pelo processo nº 2015/11937-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

os eventos considerados somente podem ser previstos com muito pouca antecedência, é crucial que o comprimento da maior rota realizada por um ônibus seja a menor possível.

Diversos modelos e variantes desse problemas são considerados na literatura, em que se podem considerar ônibus iguais ou com capacidades diferentes, abrigos limitados, etc. Alguns trabalhos relacionados já estudaram o Problema da Evacuação por Ônibus. Particularmente, Bish (2011) introduziu um modelo matemático para o problema e desenvolveu um algoritmo heurístico para esse modelo. Ainda, Goerigk et al. (2013) descrevem diversas abordagens para obtenção de limitantes inferiores ou superiores (para o modelo de programação linear inteira), discutindo algumas técnicas de *branch-and-pruning*, e fazendo uma comparação de tais estratégias com a utilização do modelo de programação inteira pura. Porém, até o momento nenhum trabalho considerou o problema do ponto de vista de algoritmos de aproximação.

Contribuições Do ponto de vista computacional, BEP generaliza problemas clássicos como o Problema do Caixeiro Viajante ou o Problema de Roteamento de Veículos e, portanto, é NP-difícil. Neste trabalho, iniciamos o estudo desse problema do ponto de vista de algoritmos de aproximação e obtemos o primeiro algoritmo polinomial com aproximação constante para uma variante de BEP. Especificamente, obtemos uma $5{,}2$-aproximação para o caso particular em que abrigos não têm capacidade.

2. Definições e preliminares

2.1. Definição

Formalmente, uma instância de BEP é composta por um grafo bipartido completo $G = (V, E)$ com partes S e $T \cup \{r\}$, em que $S = \{1, \ldots, s\}$ é o conjunto de fontes, $T = \{1, \ldots, t\}$ é o conjunto de sorvedouros e r representa um local distinto, que é usado como depósito de um número B de ônibus. Para cada fonte $i \in S$, existem l_i grupos de pessoas a serem resgatadas esperando em i, sendo que cada ônibus tem capacidade para transportar exatamente um grupo por vez. Cada sorvedouro $j \in T$ tem capacidade para abrigar até u_j grupos de pessoas. O tempo de viagem entre dois nós é dado por uma função de distância $d : V^2 \to \mathbb{R}^+$, i.e., para cada par i, j em V, vale $d_{ij} = d_{ji} \geq 0$ e $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ para todo $k \in V$.

Uma solução para o problema é um conjunto de B passeios em G, começando por r e terminando em um vértice de T (possivelmente com repetições de vértices), em que cada vértice $i \in S$ aparece pelo menos l_i vezes no conjunto de todas as rotas e cada vértice $j \in T$ apareça no máximo u_j vezes no conjunto de todas as rotas. O objetivo é encontrar uma solução que minimiza a distância total percorrida pela maior rota.

Seja $L = \sum_{i \in S} l_i$ o número total de grupos de pessoas a serem resgatadas. Sem perda de generalidade, pode-se supor que $B \leq L$, já que do contrário uma solução ótima poderia ser trivialmente encontrada associando-se um ônibus para cada grupo e reduzindo o problema para um problema de emparelhamento de custo mínimo. Ainda, suponha que L é limitado polinomialmente por $|S| + |T|$. Assim, a soma dos números de vértices (contando repetições) em todas as rotas é limitado polinomialmente em $|S| + |T|$ e, nesse caso, a saída do problema tem tamanho polinomial. Do contrário, se L não for limitado por um polinômio de $|S| + |T|$, então qualquer algoritmo para BEP não pode ser polinomial, considerando-se o tamanho da saída.

UNCAPBEP(G, d, B, r, l)

1. Para cada par $s_{\text{in}}, s_{\text{out}} \in S \times S$ tal que $s_{\text{in}} \neq s_2$:
   (a) $\sigma' \leftarrow$ PATHTSP$(\tilde{d}, s_{\text{in}}, s_{\text{out}})$;
   (b) Para cada par consecutivo de fontes i, j em σ', insira um sorvedouro k entre os dois de forma que $d(i,k) + d(k,l) = \tilde{d}(i,l)$, obtendo um passeio σ em $S \cup T$;
   (c) Divida σ em subcaminhos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_B$ de tal forma que o comprimento do maior subcaminho é no máximo $d(\sigma)/B$, onde $d(\sigma)$ é o comprimento de σ;
   (d) Para cada i, $1 \leq i \leq B$, seja t_i o sorvedouro mais próximo de acordo com d da última fonte de σ_i;
   (e) $P(s_{\text{in}}, s_{\text{out}}) \leftarrow \{r\sigma_1 t_1, r\sigma_2 t_2, \ldots, r\sigma_B t_B\}$;
2. Devolva $\arg\min\{\text{VAL}(P(s_{\text{in}}, s_{\text{out}}))\colon s_{\text{in}}, s_{\text{out}} \in S \times S, s_{\text{in}} \neq s_{\text{out}}\}$.

Algoritmo 1: BEP Sem Capacidades

Com as hipóteses acima, pode-se considerar, sem perda de generalidade, que $l_i = 1$ para todo $i \in S$ e $u_j \in \{1, \infty\}$ para todo $j \in T$. Para ver o porquê, basta criar uma instância equivalente onde: (i) para cada fonte $i \in S$, substitua i por l_i cópias de i; e (ii) para cada sorvedouro $j \in T$, se $u_j \geq L$, então substitua j por um sorvedouro com capacidade ∞, ou se $u_j < L$, então substitua j por u_j cópias de j.

Neste trabalho consideramos somente a variante em que todo sorvedouro tem capacidade infinita. Assim, BEP Sem Capacidades (NC-BEP) é o caso particular de BEP em que, para todo $j \in T$, vale $u_j = \infty$ e, para todo $i \in S$, vale $l_i = 1$.

2.2. NP-Completude

Verificando que (s,t)-TSP pode ser codificado como uma instância de NC-BEP, obtém-se o seguinte resultado. Lembre-se de que (s,t)-TSP é uma variante do TSP em que, dados um grafo G e dois vértices s e t de G, queremos encontrar um caminho Hamiltoniano que começa em s e termina em t e que tenha custo mínimo entre os caminhos com essa forma.

Teorema 2.1. O problema NC-BEP é NP-difícil, mesmo quando $B = 1$.

3. Algoritmo para BEP Sem Capacidades

O algoritmo para NC-BEP é baseado na ideia de quanto menor for o número de ônibus disponíveis, B, quando comparado com o número total de pessoas a serem resgatadas, L, então a estrutura de uma solução deve se assemelhar mais com aquela de NC-BEP com um único ônibus. O algoritmo executa em duas partes. Na primeira, enumeramos dois vértices de S que seriam o primeiro e o último visitados em uma solução de NC-BEP com um único ônibus, assim, reduzindo o problema para uma instância de (s,t)-TSP com uma função de distância modificada. Na segunda parte, modificamos a solução obtida para o problema com um único ônibus, criando B rotas para o problema original.

Seja $\tilde{d}_{ij}$ o menor caminho de $i \in S$ para $j \in S$ que passa por algum sorvedouro $k \in T$. É fácil obter o seguinte lema.

Lema 3.1. $\tilde{d}$ é uma função de distância sobre S.

No Algoritmo 1, denotamos por PATHTSP uma α-aproximação para (s,t)-TSP e, dado um conjunto de rotas P, denotamos por $\text{VAL}(P)$ o comprimento da maior rota em P.

4. Análise

Primeiro, comparamos o valor ótimo de uma solução de NC-BEP com 1 ou B ônibus. Considere duas instâncias I_1 e I_B de NC-BEP sobre o mesmo grafo G e com mesmo conjunto de demandas l_i, para cada $i \in S$, mas cujos números de ônibus são 1 e B, respectivamente. A seguir, definimos OPT_1 e OPT_B como os valores de soluções ótimas para I_1 e I_B. O próximo lema limita o valor ótimo para I_1.

Lema 4.1. Para todo $B \geq 1$, vale $\mathrm{OPT}_1 \leq (2B-1)\mathrm{OPT}_B$.

A afirmação a seguir segue diretamente do fato de que cada fonte está em uma rota e cada rota é um limitante para o valor ótimo.

Lema 4.2. Valem: $\max_{i\in S} d(r,i) \leq \mathrm{OPT}_B$ e $\max_{i\in S}\min_{j\in T} d(i,j) \leq \mathrm{OPT}_B$.

Teorema 4.3. Seja α o fator de aproximação de PATHTSP para (s,t)-TSP. Então UNCAPBEP é uma $(2\alpha+2)$-aproximação para NC-BEP.

Demonstração. Considere uma solução ótima para I_1, isso é, o problema com um único ônibus. Nesse caso, uma solução é um passeio da seguinte forma $rs_1t_1\ldots s_{|S|}t_{|S|}$. Defina $s^*_{\text{in}} = s_1$ e $s^*_{\text{out}} = s_{|S|}$. Seja π o subpasseio $s_1t_1s_2\ldots s_{|S|}$ e $d(\pi)$ seu comprimento. Também seja π' o subpasseio sem os sorvedouros $s_1s_2\ldots s_{|S|}$ e $\tilde{d}(\pi')$ o comprimento. Claramente, $\tilde{d}(\pi') = d(\pi)$.

Agora considere uma instância de $(s^*_{\text{in}}, t^*_{\text{out}})$-TSP formada pelos vértices S, com distância $\tilde{d}$, e seja $\mathrm{OPT}_{\text{TSP}}$ uma solução ótima para essa instância. Sabemos que $\mathrm{OPT}_{\text{TSP}} \leq d(\pi)$. De fato, π' é uma solução viável para $(s^*_{\text{in}}, t^*_{\text{out}})$-TSP, então $\mathrm{OPT}_{\text{TSP}} \leq \tilde{d}(\pi') = d(\pi)$. Pelo Lema 3.1 e pelo fato de PATHTSP ser uma α-aproximação, temos que $\tilde{d}(\sigma') \leq \alpha\mathrm{OPT}_{\text{TSP}}$. Por construção de σ e π, temos $d(\sigma) \leq \alpha d(\pi)$.

Considere o conjunto de rotas $P(s^*_{\text{in}}, s^*_{\text{out}})$, que foi construído pelo algoritmo. Seja $r\sigma_jt_j$ a rota de maior comprimento e suponha que σ_j começa em s_i e termina em s_j. Combinando com os Lemas 4.1 e 4.2, obtemos:

$$
\begin{aligned}
d(r\sigma_jt_j) &= d(r,s_i) + d(\sigma_j) + d(s_j,t_j)\\
&\leq \mathrm{OPT}_B + d(\sigma)/B + \mathrm{OPT}_B\\
&\leq 2\mathrm{OPT}_B + \alpha d(\pi)/B\\
&\leq 2\mathrm{OPT}_B + \alpha\mathrm{OPT}_1/B\\
&\leq 2\mathrm{OPT}_B + \alpha(2B-1)\mathrm{OPT}_B/B\\
&\leq (2+2\alpha)\mathrm{OPT}_B.
\end{aligned}
$$

Como o algoritmo devolve a melhor solução, o teorema segue. □

Se utilizarmos o algoritmo de Sebő (2013) como sub-rotina para (s,t)-TSP, que obtém fator de aproximação $8/5$, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4. Existe uma $5{,}2$-aproximação para NC-BEP.

Referências

Bish, D. R. (2011). Planning for a bus-based evacuation. *OR Spectrum*, 33(3):629–654.

Goerigk, M., Grün, B., and Heßler, P. (2013). Branch and bound algorithms for the bus evacuation problem. *Computers & Operations Research*, 40(12):3010 – 3020.

Sebő, A. (2013). Eight-fifth approximation for the Path TSP. In *Proceedings of the 16th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, pages 362–374.