Número de Ramsey relativo a arestas de potências de caminhos

Dennis Clemens[1], Matthew Jenssen[2], Yoshiharu Kohayakawa[4], Natasha Morrison[5], Guilherme Oliveira Mota[3,4], Damian Reding[1], Barnaby Roberts[2]

[1]Technische Universität Hamburg, Institut für Mathematik
Hamburg, Germany

[2]Department of Mathematics, London School of Economics
London, United Kingdom

[3]Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC
Santo André, Brazil

[4]Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
São Paulo, Brazil

[5]Mathematical Institute, University of Oxford
Oxford, United Kingdom

{dennis.clemens|damian.reding}@tuhh.de,

{m.o.jenssen|b.j.roberts}@lse.ac.uk,

{yoshi|mota}@ime.usp.br, morrison@maths.ox.ac.uk

Abstract. *Given graphs G and H and a positive integer q we say that G* is q-Ramsey for H *if every q-colouring of the edges of G contains a monochromatic copy of H, denoted $G \to (H)_q$. The* size-Ramsey number $\hat{r}(H)$ *of a graph H is defined to be $\hat{r}(H) = \min\{|E(G)|\colon G \to (H)_2\}$. Answering a question suggested by Conlon, we prove that $\hat{r}(P_n^k) = O(n)$ for every fixed k, where P_n^k is the kth power of the n-vertex path P_n, i.e., the graph with vertex set $V(P_n)$ and all edges $\{u, v\}$ such that the distance between u and v in P_n is at most k.*

Resumo. *Dados grafos G e H e um inteiro positivo q, dizemos que G* é q-Ramsey para H *se toda q-coloração das arestas de G contém uma cópia monocromática de H. Denotamos essa propriedade por $G \to (H)_q$. O* número de Ramsey relativo a arestas $\hat{r}(H)$ *de um grafo H é definido como $\hat{r}(H) = \min\{|E(G)|\colon G \to (H)_2\}$. Respondendo uma pergunta sugerida por Conlon, provamos que $\hat{r}(P_n^k) = O(n)$ para todo k fixo, onde P_n^k é a k-ésima potência do caminho com n vértices P_n, i.e., o grafo com conjunto de vértices $V(P_n)$ e todas as arestas $\{u, v\}$ tais que a distância entre u e v em P_n é no máximo k.*

O terceiro autor foi apoiado pela FAPESP (2013/03447-6, 2013/07699-0), pelo CNPq (459335/2014-6, 310974/2013-5) e pelo Projeto MaCLinC/USP. O quinto autor foi apoiado pela FAPESP (2013/11431-2, 2013/03447-6) e parcialmente pelo CNPq (459335/2014-6). A colaboração de parte dos autores foi apoiada pelo projeto CAPES/DAAD PROBRAL (430/15). Essa pesquisa foi realizada enquanto os autores participavam do *ATI–HIMR Focused Research Workshop: Large-scale structures in random graphs*

1. Introdução

Dados grafos G e H e um inteiro positivo q, dizemos que *G é q-Ramsey para H* se toda q-coloração das arestas de G contém uma cópia monocromática de H. Denotamos essa propriedade por $G \to (H)_q$. Quando $q = 2$, escrevemos simplesmente $G \to H$. Em sua forma mais simples, o clássico Teorema de Ramsey [Ramsey 1930] afirma que para qualquer grafo H existe um inteiro N tal que $K_N \to H$. O *número de Ramsey* $r(H)$ de um grafo H é definido como o menor tal inteiro N. Problemas em Teoria de Ramsey tem sido bastante estudados e muitas técnicas elegantes têm sido desenvolvidas para estimar os números de Ramsey. O trabalho de Conlon, Fox e Sudakov [Conlon et al. 2015] contém um resumo detalhado dos avanços na área.

Diversas variantes do clássico problema de Ramsey foram introduzidas e continuam a ser muito estudadas (uma boa introdução a esses problemas relacionados pode ser vista em [Conlon et al. 2015]. Em particular, Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp [Erdős et al. 1978] propuseram o problema de determinar a menor quantidade de arestas em um grafo G tal que $G \to H$. Mais precisamente, definimos o *número de Ramsey relativo a arestas de H*, denotado por $\hat{r}(H)$, como $\hat{r}(H) = \min\{|E(G)|\colon G \to H\}$. Aqui estamos interessados em problemas envolvendo estimar $\hat{r}(H)$.

Para qualquer grafo H, temos o limitante óbvio $\hat{r}(H) \leqslant \binom{r(H)}{2}$. Um resultado de Chvátal (veja, e.g., [Erdős et al. 1978]) garante que esse é o valor correto para o número de Ramsey relativo a arestas de grafos completos, i.e., $\hat{r}(K_n) = \binom{r(K_n)}{2}$.

Considerando o caminho P_n com n vértices, Erdős [Erdős 1981] fez a seguinte pergunta: é verdade que $\lim_{n\to\infty}(\hat{r}(P_n)/n) = \infty$ e $\lim_{n\to\infty}(\hat{r}(P_n)/n^2) = 0$? Utilizando uma construção probabilística, Beck [Beck 1983] provou que o número de Ramsey relativo a arestas de caminhos é linear, i.e., $\hat{r}(P_n) = O(n)$. Em [Alon and Chung 1988] é fornecida uma construção explícita de um grafo G com $O(n)$ arestas tal que $G \to P_n$. Recentemente, Dudek e Prałat [Dudek and Prałat 2015] obtiveram uma prova alternativa para esse resultado (veja também [Letzter 2016]). Mais geralmente, Friedman e Pippenger [Friedman and Pippenger 1987] provaram que número de Ramsey relativo a arestas de árvores com grau máximo limitado é linear (veja também [Dellamonica 2012, Haxell and Kohayakawa 1995, Ke 1993]) e foi mostrado em [Haxell et al. 1995] que circuitos também tem número de Ramsey relativo a arestas linear.

Respondendo uma questão colocada por Beck [Beck 1990] (negativamente), que perguntou se $\hat{r}(G)$ é linear para todos os grafos G com grau máximo limitado, Rödl e Szemerédi mostraram que existe um grafo H com n vértices e grau máximo 3 tal que $\hat{r}(H) = \Omega(n \log^{1/60} n)$. O melhor limitante superior conhecido atualmente para grafos com grau máximo limitado é provado em [Kohayakawa et al. 2011], onde é provado que para todo Δ existe uma constante c tal que para qualquer grafo H com n vértices e grau máximo Δ temos

$$\hat{r}(H) \leqslant cn^{2-1/\Delta} \log^{1/\Delta} n.$$

Resultados adicionais sobre o número de Ramsey relativo a arestas podem ser vistos em [Ben-Eliezer et al. 2012, Kohayakawa et al. 2016, Reimer 2002].

Dado um grafo H com n vértices e um inteiro $k \geqslant 2$, a k-ésima potência H^k de H é o grafo com conjunto de vértices $V(H)$ e todas as arestas $\{u, v\}$ tais que a distância entre u e v em H é no máximo k. Respondendo uma questão sugerida por

Conlon [Conlon 2016], provamos que o número de Ramsey de potências relativo a arestas de caminhos é linear. O seguinte teorema é o nosso resultado principal.

Teorema 1. *Para todo inteiro* $k \geqslant 2$*, temos* $\hat{r}(P_n^k) = O(n)$.

Note que dado o circuito C_n com n vértices, temos $C_n^k \subseteq P_n^{2k}$. Assim, o seguinte corolário segue diretamente do Teorema 1.

Corolário 2. *Para todo inteiro* $k \geqslant 2$*, temos* $\hat{r}(C_n^k) = O(n)$.

2. Ideia da prova do Teorema 1

Para provar o Teorema 1 precisamos mostrar que existe um grafo G com $O(n)$ arestas tal que $G \to P_n^k$. Primeiramente, mostramos que existe um grafo H com quantidade linear de arestas e grau máximo limitado por uma constante tal que existe uma aresta entre quaisquer subconjuntos suficientemente grandes de $V(H)$. Seja t uma constante suficientemente grande com relação a k. Vamos considerar o "blow-up" completo H_t^k da k-ésima potência H^k de H, i.e., o grafo obtido pela troca de cada vértice v de H^k por um grafo completo com $r(K_t)$ vértices, a *classe* $C(v)$, e pela adição de, para cada aresta $\{u, v\} \in E(H^k)$, todas as arestas entre $C(u)$ e $C(v)$. Note que H_t^k tem uma quantidade linear de arestas.

Seja $\chi\colon E(H_t^k) \to \{\text{vermelha}, \text{azul}\}$ uma coloração das arestas de H_t^k. Vamos mostrar que H_t^k contém uma cópia monocromática de P_n^k sob χ. Como toda classe $C(v)$ de H_t^k contém $r(K_t)$ vértices, então cada classe contém uma cópia monocromática $B(v)$ de K_t. Sem perda de generalidade, o conjunto $W := \{v \in V(H)\colon B(v) \text{ é azul}\}$ tem cardinalidade pelo menos $v(H)/2$. Seja $F := H[W]$ o subgrafo de H induzido por W, e seja F' o subgrafo de $F_t^k \subseteq H_t^k$ induzido por $\bigcup_{w \in W} V(B(w))$. Dada a coloração χ acima, definimos a coloração auxiliar χ' de $E(F^k)$ como segue: uma aresta $\{u, v\} \in E(F^k)$ é colorida com a cor *azul* se o subgrafo bipartido $F'[V(B(u)), V(B(v))]$ de F' naturalmente induzido pelos conjuntos $V(B(u))$ e $V(B(v))$ contém um $K_{2k,2k}$ azul. Caso contrário $\{u, v\}$ é colorida com a cor vermelha.

Utilizando o Teorema 1.7 de [Pokrovskiy 2017], mostramos que toda 2-coloração de $E(F^k)$ contém ou uma cópia azul de P_n ou uma cópia vermelha da k-ésima potência P_n^k de P_n. No primeiro caso, não é difícil encontrar uma cópia azul de P_n^k em H_t^k. O segundo caso é um pouco mais complicado, mas explorando as propriedades estruturais de H_t^k é possível combinar o clássico Teorema de Kővári–T. Sós–Turán [Kővári et al. 1954] com uma aplicação do lema local [Erdős and Lovász 1975, p. 616] para obter uma cópia vermelha de P_n^k em H_t^k. Detalhes dessa prova serão dados na versão completa deste trabalho.

Referências

Alon, N. and Chung, F. R. K. (1988). Explicit construction of linear sized tolerant networks. *Discrete Math.*, 72(1-3):15–19.

Beck, J. (1983). On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I. *J. Graph Theory*, 7(1):115–129.

Beck, J. (1990). On size Ramsey number of paths, trees and circuits. II. In *Mathematics of Ramsey theory*, volume 5 of *Algorithms Combin.*, pages 34–45. Springer, Berlin.

Ben-Eliezer, I., Krivelevich, M., and Sudakov, B. (2012). The size Ramsey number of a directed path. *J. Combin. Theory Ser. B*, 102(3):743–755.

Conlon, D. (2016). Problema sugerido para o *ATI–HIMR Focused Research Workshop: Large-scale structures in random graphs*, Alan Turing Institute, Dezembro de 2016.

Conlon, D., Fox, J., and Sudakov, B. (2015). Recent developments in graph Ramsey theory. In *Surveys in combinatorics 2015*, volume 424 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 49–118. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Dellamonica, Jr., D. (2012). The size-Ramsey number of trees. *Random Structures Algorithms*, 40(1):49–73.

Dudek, A. and Prałat, P. (2015). An alternative proof of the linearity of the size-Ramsey number of paths. *Combin. Probab. Comput.*, 24(3):551–555.

Erdős, P. (1981). On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica*, 1(1):25–42.

Erdős, P., Faudree, R. J., Rousseau, C. C., and Schelp, R. H. (1978). The size Ramsey number. *Period. Math. Hungar.*, 9(1-2):145–161.

Erdős, P. and Lovász, L. (1975). Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II*, pages 609–627. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. North-Holland, Amsterdam.

Friedman, J. and Pippenger, N. (1987). Expanding graphs contain all small trees. *Combinatorica*, 7(1):71–76.

Haxell, P. E. and Kohayakawa, Y. (1995). The size-Ramsey number of trees. *Israel J. Math.*, 89(1-3):261–274.

Haxell, P. E., Kohayakawa, Y., and Łuczak, T. (1995). The induced size-Ramsey number of cycles. *Combin. Probab. Comput.*, 4(3):217–239.

Ke, X. (1993). The size Ramsey number of trees with bounded degree. *Random Structures Algorithms*, 4(1):85–97.

Kohayakawa, Y., Retter, T., and Rödl, V. (2016). The size-Ramsey number of short subdivisions of bounded degree graphs. Submitted, 2016.

Kohayakawa, Y., Rödl, V., Schacht, M., and Szemerédi, E. (2011). Sparse partition universal graphs for graphs of bounded degree. *Adv. Math.*, 226(6):5041–5065.

Kővári, T., Sós, V. T., and Turán, P. (1954). On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Math.*, 3:50–57.

Letzter, S. (2016). Path Ramsey number for random graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 25(4):612–622.

Pokrovskiy, A. (2017). Calculating Ramsey numbers by partitioning colored graphs. *Journal of Graph Theory*, 84(4):477–500.

Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, S2-30(1):264.

Reimer, D. (2002). The Ramsey size number of dipaths. *Discrete Math.*, 257(1):173–175.