

Utilizando álgebras de flags para problemas de combinatória extremal

Roberto F. Parente^{1,2}, Cristiane M. Sato³

¹ Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal da Bahia
Salvador, Brasil

² Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
São Paulo, Brazil

³ Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC
Santo André, Brazil

robertop@ime.usp.br, c.sato@ufabc.edu.br

Abstract. *The goal of this paper is to present a simple introduction to the theory of flag algebras developed by Razborov, as well as illustrate this theory's power for obtaining results in extremal combinatorics. In this paper, we investigate a density problem in tournaments.*

Resumo. *O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução acessível à teoria das álgebras de flags desenvolvida por Razborov, bem como ilustrar a aplicabilidade desta teoria para obter resultados em combinatória extremal. Neste trabalho, lidamos com um problema de densidade em torneios.*

Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução à teoria de álgebras de flag, desenvolvida por Razborov [Razborov 2007], que tem sido utilizada em diversos problemas de combinatória extremal. Para ilustrar a aplicabilidade dessa teoria, apresentamos um resultado para torneios [Coregliano et al. 2015, Parente 2016] obtido utilizando técnicas da teoria de álgebra de flags.

Um *torneio* é um digrafo $T = (V, A)$ tal que, para cada par não-ordenado de vértices $\{u, v\}$, temos que exatamente um dentre (u, v) e (v, u) pertence a A (veja a Figura 1). O problema que estudamos é o seguinte. Seja T um torneio com t vértices. Queremos calcular o seguinte valor: $\max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(T, T_n)$, onde \mathcal{T}_n é o conjunto de todos os torneios com n vértices e $p(T, T_n)$ é o número de cópias de T em T_n dividido por $\binom{n}{t}$. Note que $p(T, T_n)$ é a probabilidade de, ao sortearmos um conjunto S de t vértices de T_n , obtermos um digrafo $T_n[S]$ isomorfo a T . Dizemos que $p(T, T_n)$ é a *densidade* de T em T_n . Ou seja, queremos saber qual é a densidade máxima de T considerando todos os torneios em n vértices. Em combinatória extremal, é comum lidarmos com versões assintóticas dos problemas investigados. No nosso caso, isso significa que queremos calcular o valor $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(T, T_n)$. Neste trabalho, utilizamos álgebras de flag para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n) = 1/16, \quad (1)$$

The first author is supported by FAPESP grant (2016/24041-6) and this article was produced as part of the activities of FAPESP Research, Innovation and Dissemination Center for Neuromathematics (grant 2013/ 07699-0 , S.Paulo Research Foundation). The second author is Partially supported by FAPESP grant (Processo 2013/03447-6).

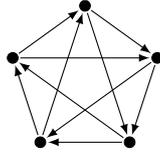


Figura 1. Torneio R : um torneio em 5 vértices.

onde R é o torneio na Figura 1. A prova completa do resultado está disponível em [Coregliano et al. 2015, Parente 2016].

Destacamos que uma característica de grande interesse no uso das álgebras de flags é a fácil utilização de resolvidores de programas semidefinidos para a obtenção de cotas superiores para os valores que queremos calcular.

Álgebra de flags

Nesta seção, apresentamos brevemente alguns conceitos de álgebra de flags. Para facilitar a leitura, definiremos flags no contexto de torneios. No entanto, um dos aspectos mais atrativos dessa teoria é que esta pode ser usada para modelar diversas estruturas combinatórias como, por exemplo, grafos, hipergrafos, permutações, grafos livres de uma família de grafos proibidos, entre outras. Mais precisamente, a teoria de álgebra de flags foi criada para lidar com qualquer teoria universal de primeira ordem.

A idéia principal é criar uma álgebra que capture as densidades $p(T, T_n)$. Trabalhamos com torneios rotulados e parcialmente rotulados: um *tipo* é um torneio cujo conjunto de vértices é $\{1, \dots, t\}$ para algum $t \in \mathbb{N}$; dado um tipo σ com t vértices, uma σ -flag é um par $F = (T, \theta)$ onde T é um torneio, $\theta : \{1, \dots, t\} \rightarrow V(T)$ é uma imersão de σ em T , ou seja, a função θ é um isomorfismo entre σ e o torneio induzido por $\text{im}(\theta)$ em T . Veja a Figura 2. Dado um tipo σ , denotamos por \mathcal{F}_ℓ^σ o conjunto das σ -flags com ℓ vértices e fazemos $\mathcal{F}^\sigma = \cup \mathcal{F}_\ell^\sigma$. Para σ -flags T, T' de tamanhos $t \leq t'$, definimos $p(T, T')$ como a razão entre o número de conjuntos W de tamanho $t - s$ (onde $s = |V(\sigma)|$) tais que $T'[W \cup S]$ é isomorfo a T (onde S é o conjunto de vértices rotulados de T) e $\binom{t'}{t-s}$.

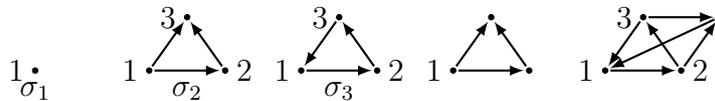


Figura 2. Tipos σ_1, σ_2 e σ_3 , uma σ_1 -flag e uma σ_3 -flag

Em seguida, construímos o conjunto $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ de todas as combinações lineares formais dos elementos de \mathcal{F}^σ . Por exemplo, se T e T' são σ -flags, então $T + T', T - T', 4T - (2/3)T'$ são elementos de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ (ou seja, qualquer combinação com quaisquer coeficientes é válida). No entanto, esse espaço de combinações não captura as densidades como queríamos e não mostra nenhuma relação entre as combinações. Para capturar as densidades, gostaríamos que T fosse considerado igual à combinação linear $\sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T; T_n)T_n$, pois $p(T, T_n) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T; \tilde{T})p(\tilde{T}, T_n)$. Isso pode ser feito da seguinte maneira. Considere o subespaço linear \mathcal{K}^σ gerado pelos elementos $T - \sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T; T_n)T_n$ (para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq V(T)$). Queremos considerar todos os elementos de \mathcal{K}^σ como zero.

Isso é feito definindo $\mathcal{A}^\sigma = \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma/\mathcal{K}^\sigma$ como a álgebra¹ obtida pelo quociente de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ por \mathcal{K}^σ . Por exemplo, seja T uma σ -flag com t vértices e T' uma σ -flag com t' vértices. Como poderíamos avaliar a expressão $T - T'$? Seja $n \geq \max\{t, t'\}$ e suponha que $\sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T; T_n) = (1/2)T_a + (1/2)T_b$ e $\sum_{T_n \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(T'; T_n) = (1/3)T_a + (2/3)T_b$. Então na álgebra vale que $T - T' = (1/6)T_a - (1/6)T_b$.

Agora volte a considerar o problema de mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n)$ é $1/16$, onde R é o torneio na Figura 1. Uma propriedade interessante é que existe uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de torneios com tamanho crescente tal que não apenas $\lim_{n \in \mathbb{N}} p(T, T_n) = 1/16$, mas $\lim_{n \in \mathbb{N}} p(T', T_n)$ também existe para todo torneio T' . Assim, é natural dizer que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de σ -flags é *convergente* se é crescente e para toda σ -flag fixa $F \in \mathcal{F}^\sigma$, a sequência de números reais $(p(F; T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Ou seja, o nosso problema é equivalente a calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} p(T, T_n)$ onde $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente.

Uma parte essencial da teoria de álgebra de flags é lidar com essas sequências convergentes. O que seria um objeto-limite apropriado? Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente de σ -flags, precisamos de um objeto ϕ para o qual $\phi(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(T; T_n)$. Seja $\text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ homomorfismos de álgebras² ϕ de \mathcal{A}^σ para \mathbb{R} tal que $\phi(T) \geq 0$ para toda σ -flag T . Dizemos que uma sequência de σ -flags $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$ se $\phi(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(T; T_n)$ para toda σ -flag T .

Como saber que esses homomorfismos são o objeto-limite “certo” para as sequências convergentes? Um belo resultado de Razborov [Razborov 2007, Theorem 3.3] e de Lovász e Szegedy [Lovász and Szegedy 2006] nos diz que toda sequência convergente de σ -flags converge para um homomorfismo em $\text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$. Por outro lado, para todo homomorfismo $\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$, existe uma sequência de σ -flags que converge para ϕ . Assim, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{T_n \in \mathcal{T}_n} p(R, T_n) = \max_{\phi \in \text{Hom}^+(\mathcal{A}^0, \mathbb{R})} \phi(T), \quad \text{onde } \mathbf{0} \text{ é um torneio sem vértices.} \quad (2)$$

O método semidefinido para álgebra de flags

Note que prover limitantes inferiores para problemas de densidade máxima é uma tarefa relativamente fácil. De fato, toda sequência crescente de torneios $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nos dá um limitante inferior $\limsup_{n \rightarrow \infty} p(T; T_n)$. De fato, seja R_{2n+1} o que chamaremos de *torneio carrossel*. Esse torneio tem conjunto de vértices $V(R_{2n+1}) = \{0, 1, \dots, 2n\}$ e conjunto de arcos $A(R_{2n+1}) = \{(v, (v+i) \bmod (2n+1)) : v \in V(R_{2n+1}) \text{ e } i \in [n]\}$, onde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Através de uma prova combinatória simples, pode-se mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(R, R_n) = 1/16$. Mas como mostrar que não é possível atingir um valor maior? De fato, essa é a parte difícil da prova.

Na seção anterior, vimos que o problema de calcular a densidade máxima de R pode ser visto como um problema de maximização em $\text{Hom}^+(\mathcal{A}^\sigma, \mathbb{R})$. À primeira vista, pode parecer que trocamos um problema relativamente simples de descrever e de forte

¹Para que \mathcal{A}^σ seja de fato uma álgebra, é preciso que definir também um produto. Para detalhes, veja o artigo [Coregliano et al. 2015, Parente 2016].

²Uma função $\phi : \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é um homomorfismo de álgebra se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{A}^\sigma$, vale que $\phi(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \phi(f)$, $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ e $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$.

intuição combinatória por um problema muito mais difícil por lidar com objetos muito mais complexos (os homomorfismos). De fato, a intuição combinatória perde-se nos homomorfismos. No entanto, Razborov desenvolveu um método para formular problemas semidefinidos para obter limitantes superiores para (2). Dessa forma, podemos usar o auxílio do computador por meio de resolvidores para programas semidefinidos para obter esses limitantes. Esse método tem sido usado com muito sucesso para avançar o entendimento de diversos problemas de combinatória extremal.

A seguir, descrevemos como construir o programa semidefinido para o nosso problema. Primeiro, escolhemos um número $m \in \mathbb{N}$ e tipos $\sigma_1, \dots, \sigma_t$. Para cada $1 \leq i \leq m$, seja k_i o número de vértices de σ_i . Em seguida, escolhemos números $\ell, \ell_1, \dots, \ell_m$ tais que $2\ell_i - k_i \leq \ell$ para todo $1 \leq i \leq m$.

No programa semidefinido abaixo, as variáveis são matrizes $Q(i) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}}$, para $1 \leq i \leq m$. Uma matriz simétrica real é dita *positiva semidefinida* se todos os seus autovalores são não-negativos. Para duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o produto interno $\langle A, B \rangle$ é definido como $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}$. O programa semidefinido é o seguinte:

$$\begin{aligned} \min y \\ \text{s.t. } p(R, T) + \sum_{i=1}^m \langle Q(i), C(i, T) \rangle \leq y \quad \forall T \in \mathcal{T}_\ell; \\ Q(i) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}} \text{ é positiva semidefinida} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

onde $C(i, T) \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i} \times \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}}$ é uma matriz de coeficientes tal que, para $T_1, T_2 \in \mathcal{F}_{\ell_i}^{\sigma_i}$,

$$C(i, T)_{T_1, T_2} = \sum_{T \in \mathcal{F}_\ell^{\sigma_i}} p(T_1, T_2; T) p(\sigma_i, T|_0) p(T|_0, T),$$

onde $T|_0$ é o torneio obtido a partir de T após a remoção dos rótulos e $p(T_1, T_2; T)$ é a *densidade conjunta* de T_1 e T_2 em T , que é definida por $p(T_1, T_2; T) = |W| / \left(\frac{\ell!}{(\ell_i - k_i)!^2 (\ell - 2\ell_i - 2k_i)!} \right)$, onde W é o conjunto de pares (W_1, W_2) de subconjuntos disjuntos de $V(T)$ de tamanho $\ell_i - k_i$ tais que $T[W_1 \cup S] \cong T_1$ e $T[W_2 \cup S] \cong T_2$ e S é o conjunto de vértices rotulados de T . Claramente, computar esses coeficientes é uma parte trabalhosa para a aplicação do método. Para o nosso problema, escolhemos $m = 3$, $\ell = 5$, $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = \ell_3 = 4$. Os tipos σ_1, σ_2 e σ_3 estão na Figura 2. Com isso, obtemos um programa semidefinido e utilizamos os programas CDSF e SDPA para obter o valor $1/16$.

Referências

- [Coregliano et al. 2015] Coregliano, L. N., Parente, R. F., and Sato, C. M. (2015). On the maximum density of fixed strongly connected subtournaments. *ArXiv e-prints*.
- [Lovász and Szegedy 2006] Lovász, L. and Szegedy, B. (2006). Limits of dense graph sequences. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(6):933–957.
- [Parente 2016] Parente, R. F. (2016). *Empacotamento e contagem em digrafos: cenários aleatórios e extremais*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- [Razborov 2007] Razborov, A. (2007). Flag algebras. *J. Symbolic Logic*, 72(4):1239–1282.