Desigualdades válidas para o problema do caminho positivo mínimo em digrafos de sinais *

João Victor Fonseca Sombra[1], **Rafael Castro de Andrade**[1], **Manoel Bezerra Campêlo Neto**[1]

[1]Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Fortaleza – CE – Brasil

Abstract. *We introduce new valid inequalities for the shortest positive path problem in signed digraphs. These inequalities strengthen the linear relaxation of the best-known mathematical model for the problem and significantly reduce execution times for solving randomly generated instances to optimality. On average, our solution approach runs 98.1% faster than the best existing model in the literature.*

Resumo. *Apresentamos novas desigualdades válidas para o problema do caminho positivo mais curto em digrafos de sinais. Essas desigualdades não somente fortalecem a relaxação linear do modelo matemático mais conhecido para o problema, mas também reduzem significativamente os tempos de execução na resolução ótima de instâncias geradas aleatoriamente. Em média, nossa abordagem proporciona uma redução de 98,1% no tempo de execução em comparação com o modelo existente na literatura.*

1. Introdução

O problema do caminho positivo, apresentado por [Kouvatis et al. 2020], foi motivado pelo problema de formação de equipes em redes sociais introduzido por [Lappas et al. 2009]. O objetivo é formar equipes de trabalho com habilidades necessárias para cada tarefa designada. Segundo [Kouvatis et al. 2020], para a equipe poder se comunicar efetivamente, todos os vínculos entre indivíduos devem ser positivos. Essa afirmação tem como base a *Teoria do Balanço Estrutural* [Heider 1946], generalizada por [Harary 1953], a qual sugere que "um amigo do meu amigo é meu amigo", "um inimigo do meu amigo é meu inimigo" e "um inimigo do meu inimigo é meu amigo". Em grafos de sinais, tais relações de amizade são representadas por (+) e de hostilidade representadas por (-). Ainda em [Kouvatis et al. 2020], o autor apresenta formas de estabelecer compatibilidade entre um par de indivíduos. Neste trabalho, consideramos dois indivíduos (vértices) compatíveis se e somente se existir ao menos um caminho positivo entre eles, ou seja, um caminho com um número par de arestas negativas.

Quanto a trabalhos existentes, [Albuquerque 2023] apresenta duas formulações para o caminho positivo mínimo entre dois vértices: um modelo novo $\mathcal{SP}_{MTZ}$ e outro existente $\mathcal{SP}_{Sign}$ [Costa et al. 2023], porém esse último não garante viabilidade caso o grafo apresente circuitos absorventes. Neste trabalho, propomos desigualdades válidas

*Parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código 001 e pelo CNPq (Proc. 404479/2023-5, 303988/2021-5)

para fortalecer a formulação $\mathcal{SP}_{MTZ}$ que se mostraram muito efetivas para reduzir tempos computacionais na resolução de instâncias do problema.

2. Problema do caminho mínimo positivo

Segundo [Hansen 1984], verificar a existência de um *(s,t)-caminho positivo* é um problema NP-completo. O melhor trabalho existente para esse problema é o de [Albuquerque 2023], que combina restrições clássicas de fluxo e as restrições de quebra de ciclo de Miller-Tucker-Zemlin (*MTZ*) [Miller et al. 1960].

Para introduzir o modelo de [Albuquerque 2023], necessitamos de algumas definições. Seja $G = (V, A = A^+ \cup A^-)$ um grafo de sinais, no qual V representa o conjunto de vértices e A^+ e A^- correspondem aos conjuntos disjuntos de arcos positivos e negativos, respectivamente. Usaremos a notação $N^+(p)$ e $N^-(p)$ para representar os vizinhos entrando e saindo em um vértice $p \in V$, respectivamente. A função de pesos $w : A^+ \cup A^- \to \mathbb{R}$ associa um peso a cada arco do grafo. O peso de um caminho P em G é a soma dos pesos dos arcos presentes em P. Dados dois vértices *s* e *t*, dizemos que existe um *(s,t)-caminho positivo* se for possível traçar um caminho de *s* a *t* com um número par de arcos negativos. O caminho positivo mínimo é aquele que possui o menor peso entre todos os possíveis *(s,t)-caminhos positivos*.

Nas expressões matemáticas a seguir, usamos as seguintes variáveis.

$$f_{pq} \in \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (p,q) \text{ pertence ao (s,t)-caminho} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \forall (p,q) \in A$$

$\pi_p \geq 0 \quad ,\forall\, p \in V$: posição do vértice p no (s,t)-caminho.

$\lambda_{st} \in \mathbb{N}$: metade do número de arestas negativas no (s,t)-caminho.

O modelo de [Albuquerque 2023] é dado por:

$$(\mathcal{SP}_{MTZ}) \quad \min \quad \sum_{(p,q)\in A} w_{pq} f_{pq} \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p\in V:(p,q)\in A} f_{pq} - \sum_{p\in V:(q,p)\in A} f_{qp} = \begin{cases} -1, & \text{se } q = s \\ 1, & \text{se } q = t \\ 0, & \text{senão;} \end{cases} \quad \forall\, q \in V, \tag{2}$$

$$\pi_p - \pi_q + |V| f_{pq} \leq |V| - 1, \quad \forall\, (p,q) \in A, \tag{3}$$

$$\pi_s = 0, \quad \pi_p \geq 0, \quad \forall\, p \in V \setminus \{s\}, \tag{4}$$

$$\sum_{(p,q)\in A^-} f_{pq} - 2\lambda_{st} = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_{st} \in \mathbb{N}^+,\ f_{pq} \in \{0,1\},\ \forall\, (p,q) \in A. \tag{6}$$

Nesse modelo, a função objetivo (1) minimiza o custo do caminho. As restrições (2) correspondem ao fluxo unitário partindo de s até t. As restrições MTZ (3) são responsáveis por realizar a quebra de ciclos formados de arcos no mesmo sentido. A restrição (5) visa garantir que o número de arestas negativas escolhidas seja par. Por fim, o domínio das variáveis estão em (4) e (6).

A essa formulação podemos adicionar desigualdades válidas e fortalecer sua relaxação linear, tornando-a mais “apertada”.

2.1. Desigualdades triviais para o problema

Inicialmente, note que todo caminho inicia em s e finaliza em t. Qualquer arco entrando em s ou saindo de t não pode fazer parte do caminho. Com isso, adicionamos a restrição que visa fixar toda variável f entrando em s ou saindo de t em zero.

$$f_{vs} = 0, \ \ \forall\, v \in N^{-}(s), \quad f_{tv} = 0, \ \ \forall\, v \in N^{+}(t) \tag{7}$$

Além disso, a soma de todos os arcos entrando ou saindo de um vértice $v \in V \setminus \{s, t\}$ é no máximo um.

$$\sum_{i \in N^{-}(v)} f_{iv} <= 1, \quad \forall v \in V \setminus \{s\}, \qquad \sum_{i \in N^{+}(v)} f_{vi} <= 1, \quad \forall v \in V \setminus \{t\} \tag{8}$$

Com base no fortalecimento da desigualdade *MTZ* (3), apresentada por [Desrochers and Laporte 1991], verificamos que o par de desigualdades abaixo colabora com a redução do tempo para resolver as instâncias do problema.

$$\pi_q - \pi_p + |V| f_{qp} + (|V| - 2) f_{pq} \le |V| - 1, \quad \forall\, (p, q) \in A \tag{9}$$

$$\pi_p - \pi_q + |V| f_{pq} + (|V| - 2) f_{qp} \le |V| - 1, \quad \forall\, (p, q) \in A \tag{10}$$

Essa melhora do *MTZ* adiciona duas restrições por arco, enquanto o modelo original adiciona apenas uma. Vale destacar que as desigualdades acima não foram exploradas em [Albuquerque 2023].

Com o objetivo de fortalecer ainda mais os limites das variáveis π, adicionamos duas novas restrições aparentemente nunca exploradas para a obtenção de caminhos com uso de desigualdades *MTZ*. Uma garante que o valor de π_t seja exatamente igual ao número de arcos no (s,t)-caminho, enquanto a outra fortalece as restrições (4), de modo que, para todo π_p tal que $p \in V \setminus \{s\}$, π_p deve ser pelo menos maior ou igual a m_p, o número mínimo de arcos de s a p no grafo, ou seja

$$\sum_{(p,q) \in A} f_{pq} - \pi_t = 0, \tag{11}$$

$$\pi_p \ge m_p, \quad \forall p \in V \setminus \{s\}. \tag{12}$$

2.2. Modelo fortalecido

Adicionando as restrições da sessão anterior ao modelo de [Albuquerque 2023], obtemos o modelo:

$$\begin{aligned} (\mathcal{SP}_{+}) \quad \min \quad & \sum_{(p,q) \in A} w_{pq} f_{pq} \\ \text{s.a.} \quad & (2), (5) - (12) \end{aligned} \tag{13}$$

3. Resultados computacionais

Os modelos foram implementados em Python, com a ferramenta *VSCode*, utilizando a biblioteca Python MIP e o *solver* o *CBC*. A máquina utilizada nos testes possui processador *Ryzen* 5 3600, 32 Gbytes de RAM, placa de vídeo RX6600 e 1 Tbytes de *SSD M.2*.

Os testes computacionais foram realizados com quatro combinações de modelos, sendo eles: ($\mathcal{SP}_{MTZ}$); ($\mathcal{SP}_{Fluxo}$) com as restrições (2)-(8); ($\mathcal{SP}_{FMTZ}$) com as restrições (2),(4)-(6) e (9)-(12); e o modelo ($\mathcal{SP}_{+}$). As instâncias de teste foram geradas de forma aleatória respeitando as seguintes restrições: cada grafo possui X vértices e Y arcos; existe um ou mais caminhos, formados somente de arcos positivos, ligando o vértice 1 ao X; deve existir ao menos um caminho, com sinais aleatórios, conectando os vértices 1 e X; os arcos restantes são inseridos aleatoriamente. Por fim, os pesos dos arcos devem ser diferentes de zero e definidos aleatoriamente no intervalo de -100 e 100. Seguindo essas restrições, geramos 10 grafos cujos resultados dos testes são apresentados na Tabela 1.

GRAFO $\lvert V\rvert - \lvert A\rvert$	$\mathcal{SP}_{MTZ}$	$\mathcal{SP}_{Fluxo}$	$\mathcal{SP}_{FMTZ}$	$\mathcal{SP}_{+}$
20 - 60	2,21s	0,63s	0,33s	0,19s
20 - 80	12,65s	0,13s	1,35s	0,14s
40 - 120	26,65s	0,09s	3,38s	0,09s
40 - 120 - 2	0,74s	0,27s	0,82s	0,13s
40 - 120 - 3	31,62s	0,50s	0,68s	0,27s
45 - 140	51,15s	0,78s	49,61s	1,80s
50 - 150	36,27s	0,40s	1,17s	1,02s
50 - 150 - 2	58,69s	0,30s	47,93s	0,28s
50 - 150 - 3	0,92s	0,24s	1,57s	0,11s
100 - 200	0,84s	0,18s	0,96s	0,19s
MÉDIA	22,17s	0,35s	10,78s	0,42s

Tabela 1. Tempo de execução de cada algoritmo.

A coluna inicial da Tabela 1 apresenta as instâncias utilizadas nos testes. O nome de cada instância corresponde à quantidade de vértices, quantidade de arcos e identificador, caso exista outra com a mesma quantidade de vértices e arcos. As demais colunas apresentam o tempo médio (com base em três execuções) para alcançar o valor ótimo em cada algoritmo.

Baseando-se nos resultados preliminares obtidos, o modelo fortalecido $\mathcal{SP}_{+}$ alcançou o valor ótimo de todas as instâncias, sendo 98.1% mais rápido do que a melhor formulação $\mathcal{SP}_{MTZ}$ presente na literatura para o problema.

Referências

Albuquerque, F. (2023). Problema de formação de equipes com caminhos positivos. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

Costa, I. S., Figueiredo, R., and Requejo, C. (2023). The shortest path in signed graphs. In *Operational Research*, pages 53–71, Cham. Springer International Publishing.

Desrochers, M. and Laporte, G. (1991). Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 10(1):27–36.

Hansen, P. (1984). Shortest paths in signed graphs. In Burkard, R., Cuninghame-Green, R., and Zimmermann, U., editors, *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research*, volume 95 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 201–214. North-Holland.

Harary, F. (1953). On the notion of balance of a signed graph. *Michigan Mathematical Journal*, 2(2):143 – 146.

Heider, F. (1946). Attitudes and cognitive organization. *The Journal of Psychology*, 21(1):107–112.

Kouvatis, I., Semertzidis, K., Zerva, M., Pitoura, E., and Tsaparas, P. (2020). Forming compatible teams in signed networks. *CoRR*, abs/2001.03128.

Lappas, T., Liu, K., and Terzi, E. (2009). Finding a team of experts in social networks. In *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, KDD '09, page 467–476, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.

Miller, C. E., Tucker, A. W., and Zemlin, R. A. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*, 7(4):326–329.