Sobre a skewness do produto cartesiano de estrelas e ciclos

Gabriel Couto[1] **e Mauro Nigro**[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

dacruz.gabriel54@gmail.com, mauro.nigro@ime.uerj.br

Abstract. *A graph G is planar when it can be represented on a plane without its edges crossing. The skewness of a graph G, denoted by $sk(G)$, is the minimum number of edges that need to be removed from G so that the resulting graph is planar. The cartesian product of the simple graphs $G = (V(G), E(G))$ and $H = (V(H), E(H))$ is the graph $G \square H$ whose vertex set is $V(G) \times V(H)$ and whose edge set is the set of all pairs $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ such that either $u_1u_2 \in E(G)$ and $v_1 = v_2$, or $v_1v_2 \in E(H)$ and $u_1 = u_2$. In 2024, Chia and Sim posed the conjecture that $sk(K_{1,n} \square C_m) = (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$, for all positive integers $n \geq 2$ and $m \geq 4$. In this paper, we prove that, for all positive integer $n \geq 2$, $sk(K_{1,n} \square C_4) = 2(n-2)$.*

Resumo. *Um grafo G é planar quando pode ser representado num plano sem que suas arestas se cruzem. A skewness do grafo G, denotada por $sk(G)$, é o menor número de arestas que precisam ser removidas de G para que o grafo resultante seja planar. O produto cartesiano dos grafos simples $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ é o grafo $G \square H$ cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto de todos os pares $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ de forma que ou $u_1u_2 \in E(G)$ e $v_1 = v_2$, ou $v_1v_2 \in E(H)$ e $u_1 = u_2$. Em 2024, Chia e Sim conjecturaram que $sk(K_{1,n} \square C_m) = (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$ e $m \geq 4$. Neste artigo, provamos que para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$, $sk(K_{1,n} \square C_4) = 2(n-2)$.*

1. Introdução

Um grafo $G = (V, E)$ é *planar* quando pode ser representado num plano sem que suas arestas se cruzem, exceto pelas suas extremidades. Um grafo derivado de G por uma sequência de subdivisões de arestas é chamado *subdivisão* de G. O *menor* de G é um grafo H obtido de G através de uma sequência de (i) remoções de arestas; e/ou (ii) remoções de vértices; e/ou (iii) contrações de arestas. Em 1930, o matemático polonês Kazimierz Kuratowski publicou uma importante caracterização para planaridade em grafos que é dado pelo Teorema 1.1, conhecido por Teorema de Kuratowski. Em 1937, Wagner publicou uma caracterização dos grafos planares equivalente ao Teorema de Kuratowski.

Teorema 1.1 ([Kuratowski 1930]). *Um grafo é planar se não possui uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Teorema 1.2 ([Wagner 1937]). *Um grafo é planar se não possui um menor K_5 ou $K_{3,3}$.*

O *produto cartesiano* dos grafos simples $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ é o grafo $G \square H$ cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto de todos os pares $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ de forma que ou $u_1u_2 \in E(G)$ e $v_1 = v_2$, ou $v_1v_2 \in E(H)$ e $u_1 = u_2$. Seja m um inteiro positivo, o *grafo caminho*, denotado por P_m, é o grafo com o conjunto de vértices $V(P_m) = \{u_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ e o conjunto de arestas $E(P_m) = \{u_iu_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}\}$. Seja n um inteiro positivo tal que $n \geq 3$, o *grafo ciclo*, denotado por C_n, é o grafo com o conjunto de vértices $V(C_n) = V(P_n)$ e o conjunto de arestas $E(C_n) = E(P_n) \cup \{u_nu_1\}$. Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos, o *grafo bipartido completo* K_{n_1,n_2} é o grafo simples no qual seu conjunto de vértices $V(K_{n_1,n_2})$ pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tal que $|V_1| = n_1$ e $|V_2| = n_2$, de forma que todas as suas arestas tenham uma extremidade em V_1 e a outra em V_2 e que todos os vértices de V_1 se conectem a todos os vértices de V_2. Em particular, o grafo K_{1,n_2} é chamado de *grafo estrela* e chamamos o vértice $x \in V_1$ de *vértice universal*. A Figura 1 apresenta o produto cartesiano entre o grafo estrela $K_{1,n}$ e o grafo caminho P_m tal que m e n são inteiros positivos.

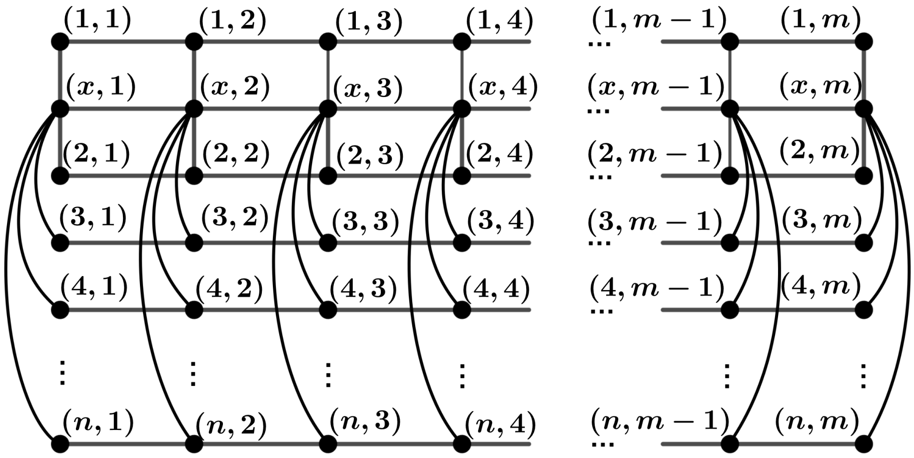

Figura 1. $K_{1,n}\square P_m$

A *skewness* de um grafo G, denotada por $sk(G)$, é o menor número de arestas que precisam ser removidas de G para que o grafo resultante seja planar. Portanto, se G é planar, então $sk(G) = 0$ e, caso contrário, $sk(G) > 0$. O problema de determinar $sk(G)$ é equivalente a determinar o subgrafo planar maximal de um grafo e que é um problema NP-completo conhecido na teoria dos grafos, já discutido por [Garey and Johnson 1990]. A Figura 2 apresenta a skewness do grafo completo K_5 e do grafo bipartido completo $K_{3,3}$. O conceito de skewness foi introduzido na década de 1970 por [Guy 1972] em que determinou a skewness dos grafos completos e bipartidos completos. Na década de 1990, [Cimikowski 1992] determinou a skewness da classe dos grafos n-cubos. No século 21 diversas classes de grafos em produtos cartesianos foram determinadas: o grafo toroidal $C_n \times C_m$ [Neto et al. 2002]; o produto entre diversos grafos como os completos e árvores; rodas e caminhos; e estrelas e caminhos [Ouyang et al. 2019]; também recentemente do grafo $C_3\square P_n$ [Ding 2023]. Damos destaque à skewness do produto cartesiano de estrelas e caminhos $K_{1,n}\square P_m$ que é dado pelo Teorema 1.3 e que é usado para a prova do nosso resultado principal.

Teorema 1.3 ([Ouyang et al. 2019]). *Se $m, n \geq 2$ são números inteiros positivos, então $sk(K_{1,n}\square P_m) = (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$.*

Recentemente [Chia and Sim 2024] determinaram a skewness do produto cartesiano do grafo estrela $K_{1,n}$ com o grafo ciclo C_3, tal que $n \geq 2$ (Teorema 1.4). E além

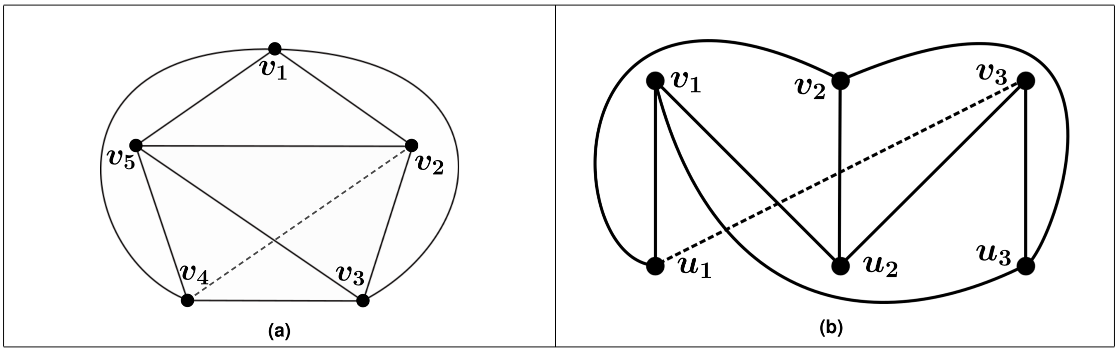

Figura 2. Representação do grafo completo K_5 e $K_{3,3}$ em que ao remover uma aresta v_4v_2 em K_5 (Figura 2a) e u_1v_3 em $K_{3,3}$ (Figura 2b) resulta em um grafo planar e portanto $sk(K_5) \leq 1$ e $sk(K_{3,3}) \leq 1$. Como K_5 e $K_{3,3}$ são não planares, então $sk(K_5) \geq 1$ e $sk(K_{3,3}) \geq 1$. Logo, $sk(K_5) = sk(K_{3,3}) = 1$.

disso, determinaram uma cota superior para a skewness do produto cartesiano de estrelas e ciclos (Observação 1.1).

Teorema 1.4 ([Chia and Sim 2024]). *Se $n \geq 2$ é um número inteiro positivo, então $sk(K_{1,n}\square C_3) = n - 2$.*

Observação 1.1 ([Chia and Sim 2024]). *Sejam n e m são inteiros positivos tais que $n \geq 2$ e $m \geq 4$. Então, $sk(K_{1,n}\square C_m) \leq (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$.*

Demonstração. Sugerimos ao leitor que veja a Figura 3 para auxílio desta demonstração. Dado que a representação de $K_{1,n}\square C_m$ pode ser obtida da Figura 1 adicionando as arestas $(x,1)(x,m)$ e $(i,1)(i,m)$, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$. Se removermos as arestas $(i,2j)(i,2j+1)$ e $(i,1)(i,m)$, com $i \in \{2,3,\ldots,n-1\}$ e $j \in \{1,2,\ldots,\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\}$, então o grafo resultante é planar. Logo, $sk(K_{1,n}\square C_m) \leq (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$. $\square$

Pela Observação 1.1, [Chia and Sim 2024] propuseram a Conjectura 1.1. Neste trabalho, provamos que a Conjectura 1.1 é válida para o produto cartesiano $K_{1,n}\square C_4$, com $n \geq 2$.

Conjectura 1.1 ([Chia and Sim 2024]). *Sejam n e m inteiros positivos tais que $n \geq 2$ e $m \geq 4$. Então, $sk(K_{1,n}\square C_m) = (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$.*

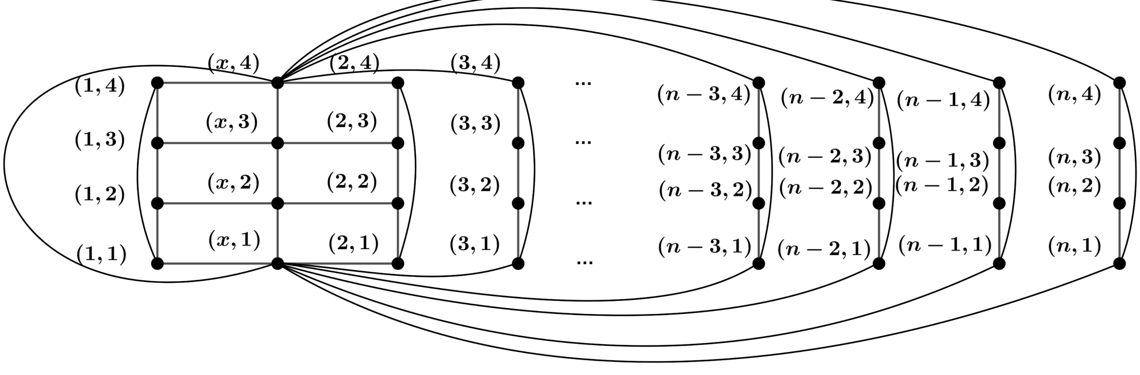

Figura 3. Um subgrafo planar maximal de $K_{1,n}\square C_4$.

2. Resultado Principal

Nesta seção, nós mostraremos que a Conjectura 1.1 é válida para determinar a skewness do grafo $K_{1,n}\square C_4$, ou seja, para qualquer número natural $n \geq 2$, temos que $sk(K_{1,n}\square C_4) = 2(n-2)$.

Teorema 2.1. *Para qualquer número natural $n \geq 2$, $sk(K_{1,n}\square C_4) = 2(n-2)$.*

Demonstração. Seja $n \geq 2$ um número inteiro positivo. Pela Observação 1.1, $sk(K_{1,n}\square C_4) \leq 2(n-2)$. Portanto, para provar que $sk(K_{1,n}\square C_4) = 2(n-2)$ é suficiente mostrar que $sk(K_{1,n}\square C_4) \geq 2(n-2)$. Observe que $K_{1,n}\square P_4$ é subgrafo de $K_{1,n}\square C_4$. Logo, $K_{1,n}\square C_4$ pode ser particionado em dois subgrafos disjuntos em arestas, um formado por $K_{1,n}\square P_4$; e outro pelas arestas do conjunto $X = \{(j,1)(j,4) \mid j \in \{1,2,3,\ldots,n\}\} \cup \{(x,1)(x,4)\}$, ou seja, $K_{1,n}\square P_4$ com a adição de $(n+1)$ arestas. Como as arestas $(1,4)(1,1)$, $(x,4)(x,1)$ e $(n,4)(n,1)$ pertencentes a X não geram cruzamentos (veja a Figura 3), temos $(n-2)$ arestas que geram cruzamentos. Portanto, $sk(K_{1,n}\square C_4) \geq sk(K_{1,n}\square P_4) + (n-2)$. Pelo Teorema 1.3, $sk(K_{1,n}\square P_4) = n-2$. Assim, $sk(K_{1,n}\square C_4) \geq (n-2)+(n-2) = 2(n-2)$. Como $sk(K_{1,n}\square C_4) \geq 2(n-2)$ e $sk(K_{1,n}\square C_4) \leq 2(n-2)$, concluimos que $sk(K_{1,n}\square C_4) = 2(n-2)$. $\square$

Neste trabalho determinamos a skewness do produto cartesiano entre estrelas e ciclos $K_{1,n}\square C_m$, tal que $m = 4$ e $n \geq 2$ (veja o Teorema 2.1), visando verificar a Conjectura 1.1. Mostramos com o Teorema 2.1 que $sk(K_{1,n}\square C_m) = (n-2)\lfloor \frac{m-1}{2} + 1 \rfloor$ para n inteiro positivo e $m = 4$. Acreditamos que esse resultado seja verdadeiro para $m \geq 5$. Assim, em futuros trabalhos, queremos replicar essa técnica na tentativa de verificar a Conjectura 1.1.

Referências

Chia, G. and Sim, K. (2024). On the skewness of products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, pages 295–393.

Cimikowski, R. (1992). Graph planarization and skewness. *Congressus Numerantium*, pages 21–32.

Ding, Z. (2023). Skewness and the crossing numbers of graphs. *AIMS Mathematics*.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., USA.

Guy, R. (1972). The slimming number and genus of graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*, pages 195–200.

Kuratowski, C. (1930). Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*.

Neto, C. D., Schaffer, K., Xavier, E. F., Stolfi, J., Faria, L., and Figueiredo, C. M. H. (2002). The splitting number and skewness of $C_n \times C_m$. *Ars Combinatoria*, 63:193–205.

Ouyang, Z., Dong, F., and Tay, E. G. (2019). On the skewness of cartesian products with trees. *Discrete Applied Mathematics*, pages 131–141.

Wagner, K. (1937). Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Mathematische Annalen*.