Um estudo sobre atribuição de papéis em produto forte de grafos usando identificação de vértices gêmeos*

Gustavo Morais Medeiros[1]**, Julliano Rosa Nascimento**[1]

[1]Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil

medeiros@discente.ufg.br, jullianonascimento@ufg.br

Abstract. *Let G be a simple graph and r a positive integer. An r-role assignment is an assignment of r distinct roles to the vertices of G, such that two vertices with the same role have the same set of roles among their adjacent vertices. We say that a role assignment is an R-role assignment of G when R is a graph and $r = |V(R)|$. Determining whether a graph has an r-role assignment is* NP-*complete for fixed $r \geq 3$, even when restricted to bipartite or chordal graphs. In this work, we investigate the existence of role assignments in the strong product of graphs, exploring in particular how properties of the factor graphs - such as the presence of twin vertices in their role assignments - influence the possible assignments in the product.*

Resumo. *Seja G um grafo simples e r um inteiro positivo. Uma r-atribuição de papéis é uma atribuição de r papéis distintos aos vértices de G, tal que, dois vértices com o mesmo papel têm o mesmo conjunto de papéis nos vértices adjacentes. Dizemos que a atribuição de papéis é uma R-atribuição de papéis de G, quando R é um grafo e $r = |V(R)|$. Determinar se um grafo possui uma r-atribuição de papéis é* NP-*completo para $r \geq 3$ fixo, mesmo restrito a grafos bipartidos ou cordais. Neste trabalho, investigamos a existência de atribuições de papéis no produto forte de grafos, explorando em particular como propriedades dos fatores - como a presença de vértices gêmeos em suas atribuições de papéis - influenciam as atribuições possíveis no produto.*

1. Introdução

Sejam G um grafo simples e R um grafo possivelmente com laços. Introduzido por [Everett and Borgatti 1991] como uma variação da coloração própria de vértices, uma R-atribuição de papéis para G é uma função de homomorfismo localmente sobrejetor de G para R, de modo que a relação de vizinhança é mantida, tal que todos os papéis vizinhos à imagem de um vértice aparecem como papéis na vizinhança do vértice. Tal condição pode ser expressa através da função $p : V(G) \to V(R)$, em que para todo $u \in V(G)$ tem-se $p(N_G(u)) = N_R(p(u))$. Dizemos que p é uma r-atribuição de papéis de G, quando $r = |V(R)|$. Assim, se G possui uma atribuição de papéis para algum grafo R com r vértices, então G possui uma r-atribuição de papéis. Comumente, chamamos $V(R)$ de *papéis*.

Vale ressaltar que o problema de determinar uma r-atribuição é um problema não monótono, ou seja, pode ser que para determinado grafo exista uma 3-atribuição de papéis e não exista uma 2-atribuição de papéis, como é o caso do grafo C_5.

*Trabalho realizado com apoio de Bolsa de iniciação científica PIP-UFG (CNPq).

Sabemos que em grafos cordais, o problema é solucionável em tempo linear para $r = 2$, mas NP-completo para $r \geq 3$ [van 't Hof et al. 2010]. Em grafos bipartidos, o problema é NP-completo para $r \geq 3$, por outro lado, constante para $r = 2$ [Pandey 2019].

Há resultados de atribuição de papéis para alguns produtos de grafos, como: Cartesiano [Castonguay et al. 2022, Castonguay et al. 2023, Zhao et al. 2010], direto [Fiala and Paulusma 2005], lexicográfico [Zhao et al. 2010]. Focamos no produto forte, definido na próxima seção. Em trabalhos anteriores [Medeiros and Nascimento 2023, Medeiros and Nascimento 2024], apresentamos alguns resultados polinomiais para 2- e 3-atribuição de papéis em produto forte. Este estudo explora outras atribuições de um grafo produto forte, usando as características dos grafos fatores, como vértices gêmeos no grafo de papéis dos fatores.

2. Conceitos Básicos

Para conceitos básicos em grafos, nos referimos a [Bondy and Murty 2008, Diestel 2000].

Um *produto forte* de dois grafos G e H é denotado por $G \boxtimes H$ e é definido como um grafo com conjunto de vértices $V(G \boxtimes H) = \{(g, h) \mid g \in V(G)$ e $h \in V(H)\}$ e conjunto de arestas $E(G \boxtimes H) = \{(g, h)(g', h') \mid g = g', hh' \in E(H)$ ou $gg' \in E(G), h = h'\} \cup \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G)$ e $hh' \in E(H)\}$ [Hammack et al. 2011]. Sendo $G \boxtimes H$ um grafo produto forte, definimos G e H sendo *grafos fatores* do grafo produto forte.

Seja G um grafo simples. Para um vértice $v \in V(G)$, a *vizinhança aberta* de v é o conjunto $N_G(v) = \{u \in V(G) | \; uv \in E(G)\}$ e a *vizinhança fechada* de v é $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Dois vértices distintos $u, v \in V(G)$ são chamados de *gêmeos verdadeiros (true twins)* se $N_G[u] = N_G[v]$, e *gêmeos falsos (false twins)* se $N_G(u) = N_G(u)$.

Identificar vértices x e y em um grafo G consiste em substituí-los por um único vértice ligado a todas as arestas incidentes a x ou y, resultando em $G \setminus \{x, y\}$. *Contrair uma aresta* e é removê-la e identificar seus extremos, obtendo $G \setminus e$.

Para $u \in V(G)$ e $v \in V(H)$, definimos ${}^uH$ sendo o subgrafo de $G \boxtimes H$ induzido por $\{u\} \times V(H)$, no qual chamamos de H-*layer* enquanto G-*layer*, G^v é o subgrafo induzido por $V(G) \times \{v\}$.

3. Resultados

Teorema 1. *Sejam G e H grafos simples conexos e R e S grafos de papéis, possivelmente com laço. Se G possui uma R-atribuição de papéis e H possui uma S-atribuição de papéis, então $G \boxtimes H$ possui uma $(R \boxtimes S)$-atribuição de papéis.*

Demonstração. Sejam $p_1 : V(G) \to V(R)$ e $p_2 : V(H) \to V(S)$ duas atribuições de papéis, tais que $|V(R)| = r$ e $|V(S)| = s$. Definimos $p : V(G \boxtimes H) \to V(R \boxtimes S)$ por $p(g, h) = (p_1(g), p_2(h))$ com $(g, h) \in V(G \boxtimes H)$. Lembramos que $p(N_{G \boxtimes H}(g, h)) = p(\{g\} \times N_H(h) \cup N_G(g) \times \{h\} \cup N_G(g) \times N_H(h))$. Logo $p(N_{G \boxtimes H}(g, h)) = (\{p_1(g)\} \times p_2(N_H(h)) \cup p_1(N_G(g)) \times \{p_2(h)\} \cup p_1(N_G(g)) \times p_2(N_H(h)))$. Isso implica que $p(N_{G \boxtimes H}(g, h)) = N_{R \boxtimes S}(p_1(g), p_2(h)) = N_{R \boxtimes S}(p(g, h))$. $\square$

Teorema 2. *Seja G um grafo com R-atribuição de papéis. Se R possui vértices gêmeos verdadeiros v_1 e v_2, então, G possui R'-atribuição de papéis, com R' obtido pela identificação dos vértices v_1, v_2.*

Demonstração. Como $v1, v_2 \in V(R)$ são gêmeos verdadeiros, então $N_R[v_1] = N_R[v_2]$ e $v_1v_2 \in E(R)$.

Desta forma, temos que para todo $u, v \in V(G)$, com $p(u) = v_1$ e $p(v) = v_2$, tem-se $p(N_G(u)) = p(N_G(v)) = N_R(p(v)) = N_R(p(u))$, ou seja, os vértices que recebem ou papel v_1 ou v_2 em $V(G)$ possuem a mesma vizinhança de papéis que v_1 e v_2 em $V(R)$.

Dada uma cópia R' de R, ao realizar uma identificação dos vértices v_1 e v_2 em R', para um único vértice w, adicionamos um laço em w. Vale ressaltar que o laço é adicionado pois, antes da identificação de vértices, $v_1v_2 \in E(R)$ e v_1 e v_2 passa a ser w, então temos que $ww \in E(R)$.

Para todo $g \in V(G)$ com $p(g) = \{v_1, v_2\}$, modificamos $p(g)$ para $p(g) = w$. Com isso, garantimos que os vértices em $V(G)$ que recebem o papel w mantenham a mesma vizinhança de papéis que w em $V(R')$, ou seja, $p(N_G(u)) = p(N_G(v)) = N_R(p(v)) = N_R(p(u))$. Dessa forma, R' continua sendo um grafo de papéis para G, agora com $|V(R')| < |V(R)|$. Observamos que a identificação de vértices pode gerar novos pares de gêmeos verdadeiros. $\square$

Desta forma, apresentamos um algoritmo que nos dá uma lista de outras R-atribuições de papéis se R possui vértices gêmeos verdadeiros, usando a identificação de vértices gêmeos do grafo de papéis.

Algoritmo 1: OUTRASATRIBUIÇÕESDEPAPEIS(G, R, p)

Entrada: Grafos conexos G e R, sendo G um grafo simples qualquer e R um grafo de atribuição de papéis de G. Função p da R-atribuição de papéis.

Saída : Lista $\mathcal{L}$ de grafos de atribuição, onde $\mathcal{L} = \{R_x \mid |V(R_x)| < |V(R)|\}$. Lista $\mathcal{P}$ de funções, onde $\mathcal{P} = \{p_x \mid p_x$ é uma função de R_x-atribuição de papéis para $G\}$, com $x \in \mathbb{N}$.

Inicialização:
- $R' \leftarrow R$; `// Grafo` R'
- $q \leftarrow p$; `// Função de atribuição` q

Enquanto existir v_1, v_2 em $V(R')$ tal que $N_{R'}[v_1] = N_{R'}[v_2]$ **faça**
- adicione w em $V(R')$ e ww em $E(R')$;
- $N_{R'}(w) = N_{R'}(v_1) \cup N_{R'}(v_2)$;
- remova v_1, v_2 em $V(R')$;
- **Para todo** g em $V(G)$ tal que $q(g) = \{v_1, v_2\}$ **faça**
  - $q(g) = w$;
- $\mathcal{L} \leftarrow R'$;
- $\mathcal{P} \leftarrow q$;

Retorna $\mathcal{L}, \mathcal{P}$;

Observamos que é feita a identificação de vértices de todos os vértices gêmeos, pois enquanto existirem vértices gêmeos a operação será realizada, e no final de cada iteração armazena em duas listas, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$, respectivamente, o grafo de papéis obtido pela identificação de vértices e a função de atribuição para cada grafo de papéis obtido.

Teorema 3. *Sejam G e H grafos simples conexos. G ou H possuem gêmeos verdadeiros se e somente se $G \boxtimes H$ possui gêmeos verdadeiros.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Por comutatividade, consideramos que G possui gêmeos verdadeiros, ou seja, existem ao menos $v, u \in G$ tal que $N_G[u] = N_G[v]$.

Observamos que para $N_G[u] = N_G[v]$, $uv \in E(G)$. Por definição de produto forte, $(v, h_j), (u, h_j) \in V(G \boxtimes H)$, para $h_j \in V(H)$ e $1 \leq j \leq |V(H)|$. Dado que em G, v, u são gêmeos, em $G \boxtimes H$ todos os vértices que possuem índice $v, u \in G$ e são da mesma H-*layer* terão $N_{G\boxtimes H}[(v, h_j)] = N_{G\boxtimes H}[(u, h_j)]$, ou seja, $G \boxtimes H$ possui gêmeos verdadeiros.

($\Leftarrow$) Pela contrapositiva. Dado que G e H não possuem gêmeos verdadeiros, então para todo $g \in V(G)$ e para todo $h \in V(H)$ temos que $N_G[g] \neq N_G[g']$ e $N_H[h] \neq N_H[h']$.

Assim, pela definição de produto forte, para qualquer $(g, h)(g', h') \in E(G \boxtimes H)$ temos os seguintes casos:

- Se $g = g', hh' \in E(H)$ (resp. $gg' \in E(G), h = h'$), temos que os vértices $(g, h)(g', h')$ estarão na mesma G-*layer* (resp. H-*layer*), logo, sendo $N_H[h] \neq N_H[h']$ (resp. $N_G[g] \neq N_G[g']$), temos que $N_{G\boxtimes H}[(g, h)] \neq N_{G\boxtimes H}[(g', h')]$;
- Se $gg' \in E(G)$ e $hh' \in E(H)$, temos que dado $N_G[g] \neq N_G[g']$ e $N_H[h] \neq N_H[h']$, logo $N_{G\boxtimes H}[(g, h)] \neq N_{G\boxtimes H}[(g', h')]$. □

No Corolário 1, a seguir, mostramos que um grafo $G \boxtimes H$ possui algumas atribuições de papéis, dado que os grafos de papéis dos fatores possuem ao menos um par de vértices gêmeos.

Corolário 1. *Sejam G um grafo com R-atribuição de papéis e H um grafo com S-atribuição de papéis, onde $|V(R)| = r$ e $|V(S)| = s$. Se R e S possuem $i \geq 2$ e $j \geq 2$ vértices gêmeos verdadeiros, respectivamente, então $G \boxtimes H$ possui k-atribuição de papéis para $k \in \{rs - ij + 1, \ldots, rs\}$.*

Demonstração. Dado que G é um grafo com R-atribuição de papéis e H um grafo com S-atribuição de papéis, onde $|V(R)| = r$ e $|V(S)| = s$, pelo teorema 1 temos que $G \boxtimes H$ possui uma $R \boxtimes S$-atribuição de papéis, sendo $|V(R \boxtimes S)| = rs$.

Além disso, observando que se $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\} \subseteq V(R)$ e $\{u_1, u_2, \ldots, u_j\} \subseteq V(S)$ são gêmeos verdadeiros, temos que para $1 \leq n \leq i$ e $1 \leq m \leq j$, todo $(v_n, u_m) \in V(R \boxtimes S)$ serão vértices gêmeos verdadeiros, ou seja, no grafo $G \boxtimes H$ teremos ij gêmeos verdadeiros.

Desta forma, usamos o Algoritmo 1 para obter novas atribuições de papéis. Inicialmente teremos um grafo de papéis com rs papéis. Para cada iteração do *loop*, um par de vértices será identificado e o novo grafo de atribuição de papéis terá um papel a menos. Visto que o grafo $R \boxtimes S$ possui ij gêmeos verdadeiros, temos que serão feitas $ij - 1$ identificação de vértices. Como a cada identificação de vértices se tem um papel a menos, na última identificação de vértices teremos o papel $rs - (ij - 1) = rs - ij + 1$. □

Considerações finais

O Corolário 1 apresenta k-atribuições de papéis em $G \boxtimes H$ para certos valores de k, mas não inclui todas as possibilidades de atribuições em um grafo. Este trabalho está em andamento e pesquisas futuras incluem a investigação de outras características dos grafos fatores ou de papéis, para que encontremos outras k-atribuições admissíveis no produto forte de grafos. Além disso, a verificação dos resultados obtidos, com gêmeos verdadeiros, para outras operações de produtos em grafos pode também ser interessante.

Referências

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., and Nascimento, J. R. (2022). Computing some role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 56(1):115–121.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., and Nascimento, J. R. (2023). Computing role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 57(3):1075–1086.

Diestel, R. (2000). *Graph theory*. New York, USA, Springer-Verlag.

Everett, M. G. and Borgatti, S. (1991). Role colouring a graph. *Mathematical Social Sciences*, 21(2):183–188.

Fiala, J. and Paulusma, D. (2005). A complete complexity classification of the role assignment problem. *Theoretical computer science*, 349(1):67–81.

Hammack, R. H., Imrich, W., and Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs*, volume 2. CRC press Boca Raton.

Medeiros, G. and Nascimento, J. (2024). 3-atribuição de papéis em produto forte de grafos bipartidos e grafos cordais sem folhas. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, pages 90–94, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.

Medeiros, G. M. and Nascimento, J. R. (2023). O produto forte de um grafo não trivial e o grafo completo possui 2-e 3-atribuição de papéis. In *Anais da XI Escola Regional de Informática de Goiás*. SBC.

Pandey, S. (2019). *Role colouring hereditary classes of graphs*. PhD thesis, Indian Institute of Science Education and Research Pune.

van 't Hof, P., Paulusma, D., and van Rooij, J. M. (2010). Computing role assignments of chordal graphs. *Theoretical Computer Science*, 411(40):3601–3613.

Zhao, Y.-q., Feng, W.-l., Li, H., and Yang, J.-m. (2010). k-role assignments under some graph operations. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, page 06.